

# VZORÁKY VEĽKEJ PÍSOMKY

letný semester 2022/23

Dokument obsahuje kľúčové časti riešení vybraných úloh z Veľkej Písomky z Formálnych jazykov a automatov (2) v letnom semestri 2022/23.

2 O každom tvrdení rozhodnite, či platí a vašu odpoveď poriadne slovne odôvodnite. Ak by vaše odôvodnenie zahŕňalo konštrukciu, stačí ju **poriadne** slovne popísať a zdôvodniť jej správnosť.

- (a) Nech  $L$  je konečný jazyk. Potom počet tried ekvivalencie relácie  $R_L$  z Myhill-Nerodeovej vety je práve  $|L|$ .
- (b) Trieda  $\mathcal{L}_{ECS}$  je uzavretá na operáciu rozdielu jazykov (t.j. operácia „množinové mínus“).

**Riešenie:**

- (a) Tvrdenie neplatí. Ľahko nahliadneme, že pre  $L = \emptyset$  platí  $|L| = 0$ , teda je konečný, a počet tried ekvivalencie relácie  $R_L$  je jedna.
- (b) Tvrdenie platí.  $L_1 - L_2 = L_1 \cap L_2^C$  pričom z prednášok vieme, že trieda  $\mathcal{L}_{ECS}$  je uzavretá na prienik aj komplement.

4 **Autor riešenia:** Šimon Sádovský

O každom z výrokov rozhodnite, či platí alebo nie. Odpovede nemusíte zdôvodňovať. Za každú správnu odpoveď dostanete +1 bod, ak neodpoviete, 0 bodov, za nesprávnu odpoveď je -1 bod. Ak by ste dokopy mali získať menej ako 0 bodov, získavate za túto úlohu 0 bodov. Za 10 nesprávnych odpovedí získavate 10 bodov a navyše čokoládu.

1. Existuje jazyk  $L \notin \mathcal{R}$  pre ktorý počet tried ekvivalencie relácie  $R_L$  z Myhill-Nerodeovej vety je konečný.

**Tvrdenie neplatí**

**Zdôvodnenie:** Priamo v znení Myhill-Nerodeovej vety je, že regulárnosť jazyka  $L$  je ekvivalentná s tvrdením, že relácia  $R_L$  je konečného indexu. To je iba inak povedané, že počet tried ekvivalencie  $R_L$  je konečný.

2. Pre dané homomorfizmy  $h_1, h_2$  je rozhodnuteľné, či existuje neprázdne slovo  $w$  také, že  $h_1(w) = h_2(w)$ .

**Tvrdenie neplatí**

**Zdôvodnenie:** Ak by to rozhodnuteľné bolo, pre ľubovoľnú inštanciu PKP  $(X, Y)$  vieme definovať a navyše vo vhodnom kódovaní aj algoritmicky zostrojiť nasledovné homomorfizmy -  $h_x(i) = x_i$  a  $h_y(i) = y_i$  pre všetky  $0 < i \leq n$ . Rozhodnúť problém zo zadania o  $h_x$  a  $h_y$  je ekvivalentné rozhodovaniu PKP  $(X, Y)$ .

3.  $\mathcal{L}_{DPDA}$  je uzavretá na práve dve z operácií komplement, zjednotenie a zrefázovanie.

**Tvrdenie neplatí**

**Zdôvodnenie:** Je uzavretá len na komplement.

4.  $\mathcal{L}_{CS}$  je uzavretá na práve dve z operácií komplement, zjednotenie a zrefázovanie.

**Tvrdenie platí**

**Zdôvodnenie:** Je uzavretá na zjednotenie aj zrefázovanie. Na komplement nie je.

5. Existuje trieda jazykov uzavretá na zjednotenie taká, že nejaká jej podtrieda nie je uzavretá na zjednotenie.

**Tvrdenie platí**

**Zdôvodnenie:** Napríklad pre  $\mathcal{L}_{DPDA} \subseteq \mathcal{L}_{CF}$  toto platí. Ale dá sa ľahko vymyslieť na mraky iných prípadov. Napríklad trieda konečných jazykov a trieda jednoslovných jazykov.

6. Nech  $M$  je a-prekladač a  $L \in \mathcal{L}_{ECS}$ . Potom  $M(L) \in \mathcal{L}_{ECS}$ .

**Tvrdenie neplatí**

**Zdôvodnenie:** a-prekladače vedú simulovať homomorfizmus.  $\mathcal{L}_{ECS}$  nie je uzavretá na homomorfizmus.

7. Nech trieda  $\mathcal{L}$  nie je uzavretá na zjednotenie. Potom pre každý  $L_1 \in \mathcal{L}$  existuje  $L_2 \in \mathcal{L}$  taký, že  $L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{L}$ .

**Tvrdenie neplatí**

**Zdôvodnenie:** Napríklad uvažujme triedu  $\mathcal{L}_{DPDA}$ , ktorá nie je uzavretá na zjednotenie. Avšak  $\emptyset \in \mathcal{L}_{DPDA}$  a navyše pre ľubovoľný  $L_2 \in \mathcal{L}_{DPDA}$  platí  $\emptyset \cup L_2 = L_2 \in \mathcal{L}_{DPDA}$ .

8. Nech  $L$  je bezprefixový jazyk. Potom  $L \in \mathcal{L}_{eDPDA}$ .

**Tvrdenie neplatí**

**Zdôvodnenie:** Napríklad  $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ .

9. Pre daný DTS  $A$  je čiastočne rozhodnuteľné či akceptuje kód aspoň jednej inštancie PKP ktorá má riešenie.

**Tvrdenie platí**

**Zdôvodnenie:** Nedeterministický DTS  $B$  čiastočne rozhodujúci tento problém funguje nasledovne:

1.  $B$  si nedeterministicky tipne kód inštancie PKP  $(X, Y)$  ktorá má riešenie a to následne overí.
2. Toto overenie spraví tak, že si nedeterministicky tipne postupnosť indexov domín tvoriacich riešenie a tento tip deterministicky overí.
3. Následne pomocou univerzálneho TS odsimuluje prácu stroja  $A$  zo vstupu na  $(X, Y)$ . Ak simulácia akceptuje,  $B$  akceptuje tiež.

10. Pre každý  $LR(0)$  jazyk existuje gramatika taká, že ju vieme parsovať algoritmom CYK.

**Tvrdenie platí**

**Zdôvodnenie:** Každý  $LR(0)$  jazyk je zároveň bezkontextový a pomocou CYK vieme parsovať všetky bezkontextové jazyky.

6 O nasledujúcich problémoch rozhodnite, či sú rozhodnuteľné alebo aspoň čiastočne rozhodnuteľné.

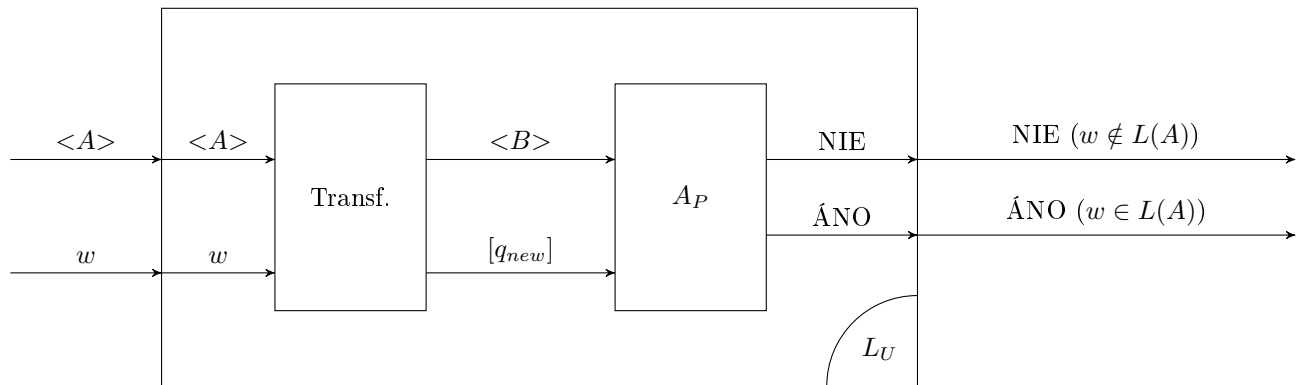
- (a) O danom DTS  $A$  a stave  $q$  rozhodnúť, či  $A$  pri výpočte na slove  $abbabbab$  použije stav  $q$  aspoň 2 krát.
- (b) O danom DTS  $A$  rozhodnúť, či akceptuje práve 2 zo slov  $ab, ba, bb$ .

V prípade, že chcete použiť Riceove vety, treba poriadne dokázať, či nejaká ich podmienka (ne)platí. Nestačí iba skonštatovať, že (ne)platí.

**Riešenie:**

- (a) Problém je čiastočne rozhodnuteľný. Stroj čiastočne rozhodujúci tento problém môže pomocou univerzálneho TS simulovať výpočet  $A$  (ktorý dostal zakódovaný na vstupe) a napríklad v stave si počítať koľko krát táto simulácia použila stav  $q$  (tiež je zo vstupu). V prípade, že napočíta v stave do 2, tak stroj akceptuje.

Problém nie je rozhodnuteľný. Dokážeme redukciami na univerzálny problém. Predpokladajme, že problém zo zadania je rozhodnuteľný a označme  $A_P$  DTS rozhodujúci tento problém. Potom stroj rozhodujúci univerzálny problém zostrojíme nasledovne:



Transformátor z  $\langle A \rangle$  a  $w$  vytvorí kód  $B$  taký, že

- Na ľubovoľnom vstupe vymaže obsah svojej pásky.
- Zapiše na pásku slovo  $w$ .
- Simuluje výpočet  $A$  na  $w$ .
- Nemá žiadne akceptačné stavy.
- Obsahuje nový stav  $q_{new}$  rôzny od všetkých stavov stroja  $A$ .
- Ak simulácia  $A$  na  $w$  príde do akceptačného stavu stroja  $A$ , tak z tohto stavu  $B$  následne hneď prejde do stavu  $q_{new}$ .
- Ak je v stave  $q_{new}$ , tak cyklí do nekonečna.

Potom zjavne platí, že  $B$  pri výpočte na slove  $abbabbab$  použije stav  $q_{new}$  aspoň dva krát práve vtedy, keď  $w \in L(A)$ . Teda by sme boli schopný rozhodovať univerzálny problém, čo je spor. Teda problém zo zadania nie je rozhodnuteľný.

- (b) Ide o vlastnosť rekurzívne vyčísliteľných jazykov, teda môžeme použiť Riceove vety. Problém nie je ani čiastočne rozhodnuteľný. Totiž, je porušená prvá podmienka druhej Riceovej vety. Konkrétne, jazyk  $\{ab, ba\}$  zjavne má danú vlastnosť, pričom jeho nadmnožina  $\{ab, ba, bb\}$  túto vlastnosť nemá, pričom ide zjavne o rekurzívne vyčísliteľný jazyk.