1. sada domácich úloh

Terézia Kabátová

1. **Zadanie:** Dokážte alebo vyvráťte tvrdenie: Pre každú dvojicu neprázdnych regulárnych jazykov L_1, L_2 existuje a-prekladač M taký, že $M(L_1) = L_2$.

   Riešenie: Dokážeme platnosť tvrdenia. Pre ľubovoľné neprázdne regulárne jazyky L_1 a L_2 zostrojíme požadovaný a-prekladač M pre ľubovoľné dva regulárne jazyky a tým dokážeme platnosť tvrdenia. Kedže $L_1, L_2 \in \mathcal{R}$, tak existujú DKA $A_1 = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ a $A_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$ také, že $L(A_1) = L_1$ a $L(A_2) = L_2$. Definujeme $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_{start}, F_2)$ kde

$$
\begin{aligned}
K &= K_2 \cup \{q_{start}\} \\
H &= \{(q_{start}, a, \varepsilon, q_{start}) \mid a \in \Sigma_1\} \cup \\
&\quad\ \{(q_{start}, \varepsilon, \varepsilon, q_{02})\} \cup \\
&\quad\ \{(p, \varepsilon, b, q) \mid p, q \in K_2, b \in \Sigma_2, \delta_2(p, b) = p\}
\end{aligned}
$$

   navyše budeme predpokladať $q_{start} \notin K_2$. $M(L_1) = L_2$ dokážeme dvomi inklúziami. Pomocou indukcie vieme dokázať nasledovné invarianty [1]

$$
\forall u \in \Sigma_1^* : (q_{start}, u, \varepsilon) \vdash_M^* (q_{start}, \varepsilon, \varepsilon)
$$
$$
\forall u \in \Sigma_1^* \ v \in \Sigma_2^* \ \exists q \in K_2 : (q_{02}, \varepsilon, \varepsilon) \vdash_M^* (q, \varepsilon, v) \Leftrightarrow (q_{02}, v) \vdash_{A_2}^* (q, \varepsilon)
$$

   - $\subseteq$ Nech $w \in L_1$ a nech $(q_{start}, w, \varepsilon) \vdash_M^* (q_F, \varepsilon, u)$ pre nejaké slovo u a nejaký stav $q_F \in F_2$. Z konštrukcie a-prekladaču M vidno, že na to, aby M prečítal vstupné slovo, musel tak spraviť nutne v stave q_{start} hneď na začiatku výpočtu pričom do tohto stavu sa nikdy potom už nevrátil. Následne musel využiť prechod $(q_{start}, \varepsilon, \varepsilon, q_{02})$. Následne podľa druhého invariantu musel odsimulovať výpočet automatu A_2, pričom pri prechodoch namiesto čítania z symbolov z pásky ich zapisoval na výstup. Formálne teda výpočet a-prekladača M musel vyzerať nasledovne: $(q_{start}, w, \varepsilon) \vdash_M^* (q_{start}, \varepsilon, \varepsilon) \vdash_M (q_{02}, \varepsilon, \varepsilon) \vdash_M^* (q_F, \varepsilon, u)$. Keďže $q_F \in F_2$ a platí druhý invariant, tak $u \in L_2$.
   - $\supseteq$ Nech $w \in L_2$, teda existuje preň akceptačný výpočet v A_2. Jazyk L_1 je neprázdny, teda existuje nejaké $u \in L_1$. M s u na vstupe môže podľa prvého invariantu toto slovo najprv celé dočítať, pomocou $(q_{start}, \varepsilon, \varepsilon, q_{02})$ prejsť do q_{02} a následne podľa druhého invariantu na vstup zapísať ľubovoľné slovo z jazyka L_2, teda aj w, pre ktoré sme hľadali výpočet. Formálne je teda pre uvažované w hľadaný preklad a-prekladača M takýto: $(q_{start}, u, \varepsilon) \vdash_M^* (q_{start}, \varepsilon, \varepsilon) \vdash_M (q_{02}, \varepsilon, \varepsilon) \vdash_M^* (q_F, \varepsilon, w)$ kde $q_F \in F_2$ taký, v ktorom A_2 akceptuje slovo w.

[1] Prvý invariant je možné dokázať indukciou vzhľadom na dĺžku vstupného slova. V druhom použijeme indukciu vzhľadom na dĺžku výpočtu, ktorou dokážeme dve implikácie: $(p, \varepsilon, \varepsilon) \vdash_M^n (q, \varepsilon, v) \Rightarrow (p, v) \vdash_{A_2}^* (q, \varepsilon)$ a $(p, v) \vdash_{A_2}^n (q, \varepsilon) \Rightarrow (p, \varepsilon, \varepsilon) \vdash_M^* (q, \varepsilon, v)$. V indukčnom kroku využijeme definíciu množiny prechodov H.

2. **Zadanie:** Skonštruujte minimálny DKA akceptujúci jazyk

$$L = \{ab^{2023k+17}ab \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Slovne odargumentuje, že vami skonštruovaný DKA naozaj akceptuje jazyk L. Jeho minimalitu poriadne formálne dokážte.

Riešenie: Nech DKA $A = (K, \Sigma, \delta, q_{start}, F)$ pričom

$$\begin{aligned} K &= \{q_{start}, q_F, q_{aa}, q_{Err}\} \cup \{q_i \mid i \in \mathbb{N} : i < 2023\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \end{aligned}$$

a δ funkcia je definovaná nasledovne

$$\begin{aligned} \delta(q_{start}, a) &= q_0 \\ \delta(q_{start}, b) &= q_{Err} \\ \delta(q_i, b) &= q_{i+1 \pmod{2023}}\ \forall i \in \mathbb{N} : i < 2023 \\ \delta(q_i, a) &= q_{Err}\ \forall i \in \mathbb{N} : i < 2023 \wedge i \neq 17 \\ \delta(q_{17}, a) &= q_{aa} \\ \delta(q_{aa}, a) &= q_{Err} \\ \delta(q_{aa}, b) &= q_F \\ \delta(q_F, a) &= q_{Err} \\ \delta(q_F, b) &= q_{Err} \\ \delta(q_{Err}, a) &= q_{Err} \\ \delta(q_{Err}, b) &= q_{Err} \end{aligned}$$

Automat funguje nasledovne. Začne v stave q_{start}, odkiaľ sa môže presunúť buď do q_0, ak prečíta na vstupe a, alebo q_{Err}, ak b, ktoré nemôže byť na začiatku slova z L. V stave q_{Err} následne prečíta celý zvyšok slova a neakceptuje. V stavoch typu q_i postupne číta symboly b zo vstupu a v stave si pamätá zvyšok po delení počtu symbolov b číslom 2023. Ak v tejto fáze narazí na symbol a namiesto b, presunie sa do stavu q_{Err}, kde opäť slovo dočíta. Jediná výnimka je stav q_{17}, kedy má prečítaná časť vstupného slova tvar $ab^{2023k+17}$, pričom $k \in \mathbb{N}$. Prečítaním symbolu a a následne b automat prejde do stavu q_{aa} a potom q_F. Prečítané slovo má tvar $ab^{2023k+17}ab$, teda patrí do jazyka L a automat ho akceptuje. Problém mohol nastať ešte pri poslednom prechode, do q_F, ak by na vstupe bolo a alebo ak by vstupné slovo pokračovalo po poslednom prechode. V takom prípade by automat prešiel do stavu q_{Err} a neakceptoval by.

Minimalitu DKA dokážeme pomocou Myhill-Nerodovej vety. Zadefinujeme reláciu ekvivalencie R [2]

$$\forall u, v \in \Sigma^* : uRv \Leftrightarrow \exists q \in K : (q_0, u) \vdash^* (q, \varepsilon) \wedge (q_0, v) \vdash^* (q, \varepsilon)$$

s nasledovnými triedami ekvivalencie

$$\begin{aligned} T_{start} &= \{\varepsilon\} \\ T_i &= \{ab^{2023k+i} \mid k \in \mathbb{N}\} \forall i \in \mathbb{N} : i < 2023 \\ T_{aa} &= \{ab^{2023k+17}a \mid k \in \mathbb{N}\} \\ T_F &= \{ab^{2023k+17}ab \mid k \in \mathbb{N}\} \\ T_{Err} &= b\{a, b\}^* \cup \{ab^{2023k+17}abw \mid w \in \{a, b\}^+\} \cup \\ &\quad \{ab^{2023k+i}aw \mid w \in \{a, b\}^*, i \in \mathbb{N} : i < 2023 \wedge i \neq 17\} \end{aligned}$$

Jazyk L je zjednotením niekoľkých tried ekvivalencie, resp. v tomto prípade jednej - T_F. V definícii relácie využívame stavy A, ktoré zodpovedajú triedam ekvivalencie, teda R má konečný index, a deterministickosť výpočtu zabezpečuje, že R je sprava invariantná. Relácia teda spĺňa podmienky z druhého bodu Myhill-Nerodovej vety. Z toho vyplýva, že R je zjemnením R_L, t. j.

$$\forall u, v \in \Sigma^* : uRv \Rightarrow uR_Lv$$

[2] Z definície vyplýva reflexívnosť, symetrickosť, a tranzitivita.

Z dokázania opačnej implikácie vyplynie $R = R_L$ a teda počet stavov minimálneho DKA akceptujúceho L je počet tried ekvivalencie skúmaných relácií. Namiesto samotnej implikácie dokážeme, že jej negácia neplatí

$$\exists u, v \in \Sigma^* : uR_Lv \wedge \neg uRv$$

Jednotlivé triedy ekvivalencie vieme definovať pomocou vhodných reprezentantov

$$\begin{aligned} T_{start} &= [\varepsilon] & T_i &= [ab^i] \ \forall i \in \mathbb{N} : i < 2023 \\ T_{aa} &= [ab^{17}a] & T_F &= [ab^{17}ab] \\ T_{Err} &= [b] \end{aligned}$$

Pomocou protipríkladov vieme ukázať, že pri dosadení ktorejkoľvek dvojice reprezentantov[3] za u, v (splnené $\neg uRv$) nemôže zároveň platiť uR_Lv, t. j. existuje sufix z taký, že $uz \in L \Leftrightarrow vz \notin L$.

u	v	z
ε	ab^i	$ab^{17}ab$
ε	$ab^{17}a$	b
ε	$ab^{17}ab$	ε
ε	b	$ab^{17}ab$
ab^i	$ab^{17}a$	b
ab^i	$ab^{17}ab$	ε
ab^i	b	$b^{2023-i+17}ab$
ab^i	ab^j [4]	$b^{2023-i+17}ab$
$ab^{17}a$	$ab^{17}ab$	ε
$ab^{17}a$	b	b
$ab^{17}ab$	b	ε

[3] Vďaka vlastnostiam rozkladu podľa relácie ekvivalencie nám stačí overovať iba reprezentantov.
[4] $i \neq j$