FOJA - DU3

Jakub Kaššák

1

Pre ľubovoľný symbol c definujeme operáciu na jazykoch $remove_c$ ako:

$$remove_c(L) = \{w \in \Sigma_L^* \mid wc \in L\}$$

Veta: Nech $L \in \mathcal{R}$, potom existuje NKA B taký, že $L(B) = remove_c(L)$.

Nech $L \in \mathcal{R}$, potom existuje NKA A bez prechodov na ε taký, že $L(A) = L,\ A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Zostrojme NKA B:

$$B = (K, \Sigma, \delta, q_0, F_B)$$

$$F_B = \{q \mid q \in K,\ \exists p \in F : p \in \delta(q, c)\}$$

$\subseteq$:

Nech $w \in L(B)$ ukážeme, že $w \in remove_c(L)$.

$$w \in L(B) \ \rightsquigarrow\ \exists q \in F_B :\ (q_0,\ w) \vdash_B^* (q,\ \varepsilon)$$

$$\overset{(0)}{\rightsquigarrow}\ \exists q \in F_B :\ (q_0,\ wc) \vdash_A^* (q,\ c)$$

$$\overset{(1)}{\rightsquigarrow}\ \exists q \in F_B,\ \exists p \in F :\ (q_0,\ wc) \vdash_A^* (q,\ c) \vdash_A (p,\ \varepsilon)$$

$$\rightsquigarrow\ wc \in L(A)\ \rightsquigarrow\ wc \in L\ \rightsquigarrow\ w \in remove_c(L)$$

(0) vyplýva z definície B - automaty A a B sa líšia len v množine akceptačných stavov, prechodové funkcie majú uplne rovnaké. Preto v nich musí existovať rovnaký výpočet na slove w.
(1) vyplýva z definície F_B.

$\supseteq$:

Nech $w \in remove_c(L)$ ukážeme, že $w \in L(B)$.

$$w \in remove_c(L)\ \rightsquigarrow\ wc \in L\ \rightsquigarrow\ \exists p \in F : (q_o,\ wc) \vdash_A^* (p,\ \varepsilon)$$

$$\overset{(2)}{\rightsquigarrow}\ \exists p \in F,\ \exists q \in K : (q_o,\ wc) \vdash_A^* (q,\ c) \vdash_A (p,\ \varepsilon)$$

$$\overset{(0)}{\rightsquigarrow}\ \exists p \in F,\ \exists q \in K :\ (q_o,\ w) \vdash_B^* (q,\ \varepsilon)\ \wedge\ p \in \delta(q, c)$$

$$\overset{(1)}{\rightsquigarrow} \exists q \in F_B :\ (q_o,\ w) \vdash_B^* (q,\ \varepsilon)\ \rightsquigarrow\ w \in L(B)$$

$(0), (1)$ - rovnako ako v predošlej inklúzii.
(2) - výpočet môžeme rozpísať, pretože má aspoň jeden krok.

Z dokázanej vety priamo vyplýva uzavretosť triedy $\mathcal{R}$ na operáciu $remove_c$.