

## SADA ÚLOH NA CVIČENIE 12

---

### Označenia

Ak píšeme  $\langle A \rangle$ , myslíme tým kód Turingovho stroja  $A$ . Pokiaľ nie je explicitne uvedené inak, predpokladáme, že  $A$  je deterministický Turingov stroj, ktorého vstupná abeceda je  $\{0, 1\}$ .

### Slovo na úvod

Ak úloha znie „nájdite algoritmus“, tak je vašou úlohou slovné popísať deterministický TS, ktorý na každom vstupe zastaví a realizuje daný algoritmus.

### Úlohy na rozhodnuteľnosť

Ak si myslíte, že rozhodovací problém je *rozhodnuteľný*, tak Vašou úlohou je poriadne slovné popísať deterministický Turingov stroj, ktorý zastane na každom vstupe a rozhoduje daný problém. Navyše, musíte zdôvodniť, prečo daný Turingov stroj zastaví na každom vstupe.

Ak si myslíte, že rozhodovací problém je **iba čiastočne rozhodnuteľný**, tak by ste mali dokázať pomocou redukcie, že daný problém je nerozhodnuteľný a navyše musíte stručne popísať Turingov stroj, ktorý daný problém čiastočne rozhoduje.

Ak si myslíte, že rozhodovací problém je *nerozhodnuteľný*, tak by ste mali dokázať pomocou redukcie, že daný problém je nerozhodnuteľný.

### Tvar odovzdávania (pre online štúdium):

Riešenie vždy očakávame odovzdané ako jeden .pdf súbor pomenovaný  $\langle \text{číslo cvičenia} \rangle\_ \langle \text{číslo úlohy} \rangle\_ \langle \text{vaše priezvisko a meno} \rangle ( \langle \text{skupina} \rangle ).pdf$ ". Napríklad Žigmund Luxemburský navštevujúci cvičenia v 2. skupine by odovzdal riešenie tretej úlohy zo sady na cvičenie 12 v súbore "12\_3\_Luxemburský Žigmund (2. skupina).pdf"

---

- Formálne skonštruujte viac-páskový deterministický Turingov stroj generujúci všetky palindromy nad abecedou  $\{a, b\}$ . Pod vygenerovaním palindromu Turingovým strojom sa myslí, že vami skonštruovaný Turingov stroj prejde do konfigurácie takej, že na výstupnej páske má zapísaný vygenerovaný palindrom a nachádza sa v nejakom špeciálnom stave, napríklad *q\_nove\_slovo*. Výstupná páska môže byť ktorákoľvek z pásek o ktorej to pri konštrukcii povieť pričom na túto pásku môžete zapisovať blank. Teda na výstupnej páske sa majú postupne objaviť všetky palindromy nad abecedou  $\{a, b\}$ . Ako súčasť vášho riešenia sa samozrejme očakáva aj neformálny slovný popis činnosti výsledného stroja.
- Formálne skonštruujte deterministický Turingov stroj  $B$ , ktorý každý vstup v podobe kódu  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$  nad vstupnou abecedou  $\{0, 1\}$  prerobí na kód  $\langle A' \rangle$  nejakého deterministického Turingovho stroja  $A'$  takého, že  $L(A') = L(A) \cup \{\varepsilon\}$  a zastaví sa. Môžete predpokladať, že vstupom je „zmysluplný“ kód stroja  $A$ . Ako súčasť vášho riešenia sa samozrejme očakáva aj neformálny slovný popis činnosti výsledného stroja.
- Definujme operáciu  $Plus(L_1, L_2)$  na jazykoch  $L_1, L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$  nasledovne:

$$Plus(L_1, L_2) = \{w +_b v \mid w \in L_1 \wedge v \in L_2\}$$

kde  $+_b$  je definované ako sčítanie na binárnych číslach.

Dokážte pomocou viac-páskového Turingovho stroja, že trieda  $\mathcal{L}_{rec}$  je uzavretá na operáciu  $Plus$ .

- Uvažujme nasledovný problém:

**VSTUP:**  $\langle A \rangle; \langle B \rangle; w \in \{0, 1\}^*$

**VÝSTUP:** Kód  $\langle C \rangle$  Turingovho stroja  $C$  takého, že platí:

- ak  $w \in L(A)$ , tak  $L(C) = L(B)$
- ak  $w \notin L(A)$ , tak  $L(C) = \emptyset$

Nájdite algoritmus riešiaci tento problém.

5. Uvažujme nasledovný rozhodovací problém:

**VSTUP:**  $\langle A \rangle$ ;  $w \in \{0, 1\}^*$ ;  $u \in \{0, 1\}^*$

**VÝSTUP:** „Áno“ práve vtedy, keď  $wu \in L(A)$ .

Je tento problém rozhodnuteľný? Ak nie, je aspoň čiastočne rozhodnuteľný? Vaše tvrdenia dokážte.

6. Uvažujme nasledovný rozhodovací problém:

**VSTUP:**  $\langle A \rangle$ ;  $w \in \{0, 1\}^*$ ;  $u \in \{0, 1\}^*$

**VÝSTUP:** „Áno“ práve vtedy, keď  $wu \notin L(A)$ .

Je tento problém rozhodnuteľný? Ak nie, je aspoň čiastočne rozhodnuteľný? Vaše tvrdenia dokážte.

7. Uvažujme nasledovný rozhodovací problém:

**VSTUP:**  $\langle A \rangle$ ;  $w \in \{0, 1\}^*$ ; kód  $[q]$  nejakého stavu  $q$  stroja  $A$

**VÝSTUP:** „Áno“ práve vtedy, keď stroj  $A$  na vstupe  $w$  zastaví v stave  $q$ .

Je tento problém rozhodnuteľný? Ak nie, je aspoň čiastočne rozhodnuteľný? Vaše tvrdenia dokážte.

8. Uvažujme nasledovný rozhodovací problém:

**VSTUP:**  $\langle A \rangle$ ; kód  $[q]$  nejakého stavu  $q$  stroja  $A$

**VÝSTUP:** „Áno“ práve vtedy, keď stroj  $A$  na vstupe 10101 zastaví v stave  $q$ .

Je tento problém rozhodnuteľný? Ak nie, je aspoň čiastočne rozhodnuteľný? Vaše tvrdenia dokážte.

9. Uvažujme nasledovný rozhodovací problém:

**VSTUP:**  $\langle A \rangle$ ;  $w \in \{0, 1\}^*$ ; binárne zapísané číslo  $n \in \mathbb{N}$

**VÝSTUP:** „Áno“ práve vtedy, keď stroj  $A$  na vstupe  $w$  prepíše aspoň  $n$  „blankov“.

Je tento problém rozhodnuteľný? Ak nie, je aspoň čiastočne rozhodnuteľný? Vaše tvrdenia dokážte.