Sada úloh na cvičenie 8

Definícia (ktorá je zaujímavá aj mimo potrieb tohto cvičenia):

- Nech L_1, L_2 sú ľubovolné jazyky. Operáciu $\sqcup\!\sqcup$ na jazykoch definujeme nasledovne:

  $$L_1 \sqcup\!\sqcup L_2 = \{u_1v_1 \dots u_nv_n \mid n \geq 1;\ u_1, \dots, u_n \in \Sigma_{L_1}^*;\ v_1, \dots, v_n \in \Sigma_{L_2}^*;\ u_1 \dots u_n \in L_1;\ v_1 \dots v_n \in L_2\}$$

  Operáciu $\sqcup\!\sqcup$ nazývame „shuffle“. To nás vedie k intuícii, že táto operácia nejakým spôsobom „premiešava“ slová.

Vysvetlenia:

Pod „poriadnym zdôvodnením“ sa myslí také slovné zdôvodnenie, podľa ktoré čitateľ nemá najmenší problém dovidieť, ako by bolo treba postupovať, keby chceme spraviť podrobný formálny dôkaz. Toto zdôvodnenie spravidla vysvetľuje hlavné myšlienky potrebné pre dôkaz a vynecháva technické časti dôkazu (napríklad dôkazy pomocných tvrdení indukciou). Pokiaľ treba *poriadne zdôvodniť* správnosť konštruckie, očakáva sa, že toto zdôvodnenie rozdelíte do dvoch inklúzii a obe poriadne slovne zdôvodníte. Teda bude jasné, že automat/gramatika ktorý ste skonštruovali akceptuje všetko čo má, ale nič navyše. Za poriadne zdôvodnenie sa rozhodne nepovažuje text na úrovni „to jednoducho vyjde“. Príklady formulácií, ktoré sú prípustné v slovnom zdôvodňovaní riešení:

- Z prechodovej funkcie vidno, že automat dokáže na vstupe so správnym prefixom prejsť do stavu q_{prefix}. Taktiež z prechodovej funkcie vidno, že ak za týmto prefixom nasleduje správny počet symbolov a, tak stroj prejde do stavu q_{hotovo} a preto stroj akceptuje všetky slová, ktoré treba.
- Je zjavné, že ak automat prečíta symbol c, prejde do stavu $q_{vyhadzuj}$. V momente, keď príde do tohto stavu platí, že počet symbolov na zásobníku je rovný počtu symbolov b prečítaných pred prvým symbolom c. Ďalej bude výpočet pokračovať tak že ....vysvetlenie ako bude pokračovať výpočet.... Z toho je zjavné, že akceptujeme iba slová z jazyka L.

---

1. Rozhodnite (a dokážte), či je jazyk L regulárny, ak:
   a) $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
   b) $L = \{ww\}$ pre nejaké $w \in \{a,b\}^*$
2. Rozhodnite (a dokážte), či je jazyk L regulárny, ak:
   a) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \wedge \#_a(w) = \#_b(w) \wedge |w| \leq 171189\}$
   b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \wedge \#_a(w) = \#_b(w) \wedge |w| \geq 171189\}$
3. Definujme binárnu operáciu $\odot$ na jazykoch nasledovne $L_1 \odot L_2 = \{vu \mid v \in L_1 \wedge u \in L_2 \wedge |v| = |u|\}$. Rozhodnite a dokážte, či je trieda $\mathcal{R}$ uzavretá na operáciu $\odot$.
4. Rozhodnite a dokážte, či je trieda $\mathcal{R}$ uzavretá na operáciu shuffle.
5. Rozhodnite a dokážte, či je trieda $\mathcal{R}$ je uzavretá na komplement.
6. Pomocou konečných automatov dokážte, že trieda $\mathcal{R}$ je uzavretá na zreťazenie.
7. Zostrojte PDA, ktorý bude akceptovať prázdnou pamäťou jazyk
   $L = \{a^nb^nc^md^m \mid n,m > 0\}$. Poriadne zdôvodnite správnosť vašej konštrukcie.

8. Zostrojte PDA, ktorý bude akceptovať akceptačným stavom jazyk
   $L = \{wa^nb^k \mid n \geq k \wedge w \in \{a, b\}^*\}$. Poriadne zdôvodnite správnosť vašej konštrukcie.

9. Zostrojte PDA, ktorý bude akceptovať prázdnou pamäťou jazyk
   $L = \{bin(n)\$bin(2n)^R \mid n \in \mathbb{N}\}$, kde $bin(n)$ reprezentuje binárny zápis čísla n. Poriadne zdôvodnite správnosť vašej konštrukcie.