Sada úloh na cvičenie 3

Definície, Označenia:

Homomorfizmus (slov). Nech $h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ (h je zobrazenie zo Σ_1^* do Σ_2^*, t.j. každé slovo nad Σ_1 zobrazí na nejaké slovo nad Σ_2) také, že $(\forall u, v \in \Sigma_1^*)\ h(u \cdot v) = h(u) \cdot h(v)$. Potom h voláme homomorfizmus.

Homomorfizmus (jazykov). Nech h je homomorfizmus, potom obraz jazyka L pri zobrazení homomorfizmom h je jazyk $h(L) \stackrel{def}{=} \{h(w) \mid w \in L\}$. Skrátene hovoríme, že $h(L)$ je homorfizmus h jazyka L.

Inverzný homomorfizmus (jazykov). Nech h je homomorfizmus. Inverzným homomorfizmom jazyka L (označujeme $h^{-1}(L)$) nazývame jazyk $h^{-1}(L) = \{w \mid h(w) \in L\}$. Neformálne môžeme o inverznom homomorfizme jazyka L uvažovať ako o množine všetkých vzorov, ktoré daný homomorfizmus zobrazí do jazyka L.

Odmocnina jazyka. $\sqrt{L} = \{w \mid ww \in L\}$.

Počet znakov v slove. $\#_a(w)$ označuje počet znakov a v slove w.

Najmenšia abeceda pre jazyk. Nech L je jzayk. Potom Σ_L označuje najmenšiu abecedu takú, že $L \subseteq \Sigma_L^*$. Hovoríme, že Σ_L je najmenšia abeceda pre jazyk L.

Pokyny:

Ak nie je v úlohe explicitne uvedené inak, musíte všetky závery, ktoré neboli dokázane na prednáške, formálne dokázať.

Ak úloha znie „Porovnanajte jazyky L_1 a L_2“, tak sa od vás očakáva, že rozhodnete, či platia obe inklúzie, tj. či platí $L_1 \subseteq L_2$ a či platí $L_2 \subseteq L_1$.

---

1. Nech $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   (a) Nech $h : \{a, b, c, d\}^* \to \{a, b, c\}^*$ je homomorfizmus daný nasledovne: $h(a) = ba,\ h(b) = a,\ h(c) = \varepsilon,\ h(d) = bc$. Nájdite množinový zápis pre jazyk $h^{-1}(L)$.

   (b) Nech $g : \{a, b, c\}^* \to \{a, b, c\}^*$ je homomorfizmus daný nasledovne: $g(a) = bb,\ g(b) = c,\ g(c) = aa$. Nájdite množinový zápis pre jazyk $g(L)$.

2. Nech L_1, L_2 sú jazyky, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus a $\Sigma_{L_1}, \Sigma_{L_2} \subseteq \Sigma$.

   (a) Porovnajte jazyky $h(L_1 \cap L_2)$ a $h(L_1) \cap h(L_2)$.

   (b) Porovnajte jazyky $h^{-1}(L_1 \cup L_2)$ a $h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$.

3. Ak $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$, $g\colon \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$ sú homomorfizmy, musí aj ich zloženie (funkcia $h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_3^*$ definovaná tak, že $(\forall w \in \Sigma_1^*)\ h(w) = g(f(w))$) byť homomorfizmus?
   Nech $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$, $g\colon \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$ sú funkcie také, že ich zloženie $h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_3^*$ je homomorfizmus. Musia potom obe funkcie f, g byť homomorfizmy?

4. Nech $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je ľubovoľný homomorfizmus a L ľubovoľný jazyk. Dokážte alebo vyvráťte nasledovné tvrdenia:
   a) Ak $(\sqrt{L})^2 = L$, tak $(\sqrt{h(L)})^2 = h(L)$.
   b) Ak $(\sqrt{L^2}) = L$, tak $(\sqrt{h(L)^2}) = h(L)$.

5. Nech $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je ľubovoľný homomorfizmus a L ľubovoľný jazyk. Dokážte alebo vyvráťte nasledovné tvrdenia:
   a) Ak $(\sqrt{L})^2 = L$, tak $(\sqrt{h^{-1}(L)})^2 = h^{-1}(L)$.
   b) Ak $(\sqrt{L^2}) = L$, tak $(\sqrt{h^{-1}(L)^2}) = h^{-1}(L)$.

6. Nájdite čo možno najjednoduchší „množinový“ zápis pre jazyk generovaný bezkontextovou gramatikou $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b, c\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to c\sigma c \mid \alpha\beta \\ \alpha &\to a^7\alpha \mid \varepsilon \\ \beta &\to \beta b^4 \mid b\}. \end{aligned}$$

Svoje tvrdenie dokážte.

7. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk $L = \{b^{2n+1}a^{5k}c^{7k+2} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$. Správnosť svojej konštrukcie dokážte.

8. Zostrojte regulárnu gramatiku generujúcu jazyk

$$L = \{a^n bu \mid n \geq 2, u \in \{a, b\}^*,\ \#_b(u) \equiv 1 \pmod 2\}$$

. Správnosť svojej konštrukcie dokážte.

9. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma\}$, $T = \{a, b, c\}$ a

$$P = \{\sigma \to \sigma a \sigma b \mid \sigma b \mid c\}.$$

Zistite, či daná gramatika je jednoznačná alebo viacznačná. Svoje tvrdenie dokážte.

10. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika a nech $\alpha \in N$. Dokážte, že pre ľubovolné $u, w, v \in (N \cup T)^*$ platí nasledujúce tvrdenie:

Ak $\alpha \Rightarrow^* w$ v G, tak platí $u\alpha v \Rightarrow^* uwv$ v G.

Pozn: Môžte sa pokúsiť dokázať aj silnejšie tvrdenie.
Pre ľubovolné $u, w, v \in (N \cup T)^*$ a pre ľubovolné $n \in \mathbb{N}$ platí nasledujúce tvrdenie:

Ak $\alpha \Rightarrow^n w$ v G, tak platí $u\alpha v \Rightarrow^n uwv$ v G.