

SADA ÚLOH NA CVIČENIE 2

Definície:

Mocnina jazyka. $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^1 = L$, $L^{n+1} = L \cdot L^n$.

*Uzáver (Kleeneho *).* $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$, $L^+ = \bigcup_{i > 0} L^i$.

Reverz slova. Nech $u = a_1 a_2 \dots a_n$, potom $u^R = a_n \dots a_2 a_1$.

Reverz jazyka. $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$.

Prefix slova w je každé slovo u také, že existuje slovo v také, že $w = uv$.

Suffix slova w je každé slovo u také, že existuje slovo v také, že $w = vu$.

Nech w je slovo. Potom $\#_a(w)$ značí počet výskytov znaku a v slove w .

Pokyny:

Ak nie je v úlohe explicitne uvedené inak, **treba všetky závery formálne dokázať**. Teda napríklad v úlohách, kde sa požaduje najšť množinový zápis sa zároveň vyžaduje, aby ste formálne dokázali správnosť tohto zápisu. Podobne aj pre ostatné úlohy.

Ak úloha znie „Porovnajzte jazyky L_1 a L_2 “, tak sa od vás očakáva, že rozhodnete, či platia obe inklúzie, tj. či platí $L_1 \subseteq L_2$ a či platí $L_2 \subseteq L_1$. Zdôrazňujeme, že v úlohách 3.-7. treba dané inklúzie dokázať alebo vyvrátiť vo všeobecnosti. To znamená alebo dokázať danú inklúziu pre ľubovoľné jazyky alebo najšť konkrétne jazyky, pre ktoré daná inklúzia neplatí. Odporúčame pozrieť aj vzorové riešenia príkladov na tému operácií nad jazykmi v časti Riešenia na stránke predmetu.

1. Nech $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nájdite množinový zápis pre jazyk obsahujúci práve všetky **prefixy** slov z L .
2. Nech $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$. Nájdite množinový zápis pre jazyk obsahujúci práve všetky **suffixy** slov z L .
3. Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajzte jazyky $(L_1 \cup L_2)^*$ a $\{\varepsilon\} \cup (L_1 \cup L_2) \cdot L_2^* \cdot (L_1 \cdot L_2^*)^* \cdot L_1^*$.
4. Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajzte jazyky $(L_1 \cap L_2)^*$ a $L_1^* \cap L_2^*$.
5. Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajzte jazyky $(L_1 \cdot L_2)^*$ a $L_1^* \cdot L_2^*$.
6. Nech L je jazyk. Porovnajzte jazyky $(L^+)^R$ a $(L^R)^+$.
7. Nech L je jazyk. Porovnajzte jazyky $(L^R \cup L)^*$ a $(L^*)^R \cup (L^R)^*$.
8. Uvažujme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ a jazyky

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\},$$

$$L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Porovnajzte jazyky L_1^+ a L_2^* .

9. Definujme odmocninu z jazyka nasledovne: $\sqrt{L} = \{w \mid ww \in L\}$.
 - a) Nájdite jazyk L taký, že $(\sqrt{L})^2 \neq L$.
 - b) Nájdite jazyk L taký, že $(\sqrt{L^2}) \neq L$.
10. Uvažujme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$ a jazyky

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\},$$

$$L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$L_3 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Porovnajzte jazyky $(L_1^* \cap L_2)^R$ a L_3^R .