

Operácie na jazykoch

Šimon Sádovský

Úloha 1. Nech L_1, L_2 sú ľubovoľné jazyky. Porovnajme jazyky $(L_1.L_2)^R$ a $L_2^R.L_1^R$.

Riešenie. Dokážeme, že $(L_1.L_2)^R = L_2^R.L_1^R$.

\subseteq : Nech $w \in (L_1.L_2)^R$. Potom $w^R \in L_1.L_2$. Teda existujú slová $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2$ také, že $w^R = u_1u_2$. Teda $(w^R)^R = (u_1u_2)^R$. Je zjavné, že $(w^R)^R = w$ a teda platí $w = u_2^R u_1^R$. Taktiež zjavne $u_1^R \in L_1^R, u_2^R \in L_2^R$. Z predchádzajúceho plynie $w \in L_2^R.L_1^R$.

\supseteq : Nech $w \in L_2^R.L_1^R$. Teda existujú slová $v_1 \in L_1^R, v_2 \in L_2^R$ také, že platí $w = v_2v_1$. Teda existujú slová $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2$ také, že $u_1^R = v_1, u_2^R = v_2$. Z toho plynie, že $w = u_2^R u_1^R$, teda $w \in (u_1u_2)^R$. Zjavne $u_1u_2 \in L_1.L_2$ a teda $w \in (L_1.L_2)^R$. \square

Poznámka. Ak sa pozrieme pozorným okom, tak zistíme, že dôkaz druhej inklúzie je v podstate to isté čo dôkaz druhej iba od zadu (až na nejaké detaily technickej povahy). Ak by sme sa trochu posnažili, rovnosť by sa dala dokázať aj sledom ekvivalencií. Takúto techniku ukážeme na 2. úlohe.

Úloha 2. Nech L je ľubovoľný jazyk nad abecedou Σ , nech $h : \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$ je ľubovoľný homomorfizmus. Porovnajme jazyky $h^{-1}(L^C)$ a $(h^{-1}(L))^C$.

Poznámka. V prípade jazyka L^C sa ako univerzum, vzhľadom na ktoré robíme komplement, berie množina Σ^* a v prípade jazyka $(h^{-1}(L))^C$ sa ako univerzum, vzhľadom na ktoré robíme komplement, berie množina Γ^* .

Riešenie. Dokážeme, že $h^{-1}(L^C) = (h^{-1}(L))^C$. Ako sme sľúbili na konci prvej úlohy, tento krát dokážeme rovnosť sledom ekvivalencií.

$w \in h^{-1}(L^C) \Leftrightarrow h(w) \in L^C \Leftrightarrow h(w) \notin L \Leftrightarrow w \notin h^{-1}(L) \Leftrightarrow w \in (h^{-1}(L))^C$ \square