Malá písomka z Formálnych Jazykov a Automatov 2

letný semester 2022/23

Na riešenie písomky máte čas **60 minút**. Za každú z úloh 1, 2 a 3 môžete získať od 0 do 10 bodov, pričom za riešenie obsahujúce vaše meno a text „Túto úlohu nechcem odovzdať" je 1 bod. **Riešenie každej úlohy píšte na samostatný papier. Nezabudnite sa na každý list papiera podpísať!**

$\boxed{1}$ Pomocou a-prekladačov dokážte, že jazyk $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_b(w) = 3.\#_c(w)+2\}$ nie je regulárny. Konštrukciu a-prekladača spravte poriadne formálne, jej správnosť stačí stručne slovne zdôvodniť. V tejto úlohe môžete štandardne predpokladať, že $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{R}$. O žiadnych iných jazykoch toto predpokladať nemôžete.

$\boxed{2}$ Dokážte, že ľubovoľný DKA akceptujúci jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \equiv 7 \pmod{1988}\}$ potrebuje aspoň 1988 stavov.

$\boxed{3}$ Uvažujme rozšírený modifikovaný PKP (RMPKP). V tomto probléme je daná sada n typov domín rovnako ako v PKP. Úlohou je povedať, či existuje také riešenie PKP, v ktorom sú navyše domino číslo 1 použité ako prvé a domino číslo 2 použité ako druhé. Nájdite a **poriadne formálne zapíšte** všeobecnú konštrukciu (redukciu), ktorá každej inštancii RMPKP priradí ekvivalentnú inštanciu PKP. Stručne slovne zdôvodnite správnosť vašej konštrukcie. Ekvivalentnou inštancou PKP sa rozumie taká inštancia PKP, ktorá má riešenie práve vtedy, keď ho má daná inštancia RMPKP.
Predveďte svoju konštrukciu na tejto inštancii RMPKP:

aa	bc	ac	ba
bba	ca	a	bca

Poznámka: Uvedená sada domín nemá riešenie ani ako PKP, ani ako RMPKP. Slúži iba na ilustráciu vašej všeobecnej konštrukcie.

$\boxed{4}$ *(Prémia pre tých, čo sa nudia. Za papier, že túto úlohu neriešite, je 0 bodov, nie 1. Za túto úlohu môžete získať 0 až 5 bodov)*
Koľko existuje jazykov L nad abecedou $\{a,b\}^*$ takých, že k nim prislúchajúca relácia R_L z Myhill-Nerodovej vety indukuje práve jednu triedu ekvivalencie? Vaše tvrdenie dokážte.

1. Lukáš Gáborik

~~Nech~~ ~~Uvaž~~ Uvažujme a-prekladač $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$, $\Sigma_2 = \{a, b\}$, $F = \{q_1\}$ a

$\cancel{H = \{(q_0, bbb, a, q_0), (q_0, cc, \varepsilon, q_1), (q_1, b, b, q_1)\}}$

$H = \{(q_0, c, a, q_0), (q_0, bb, \varepsilon, q_1), (q_1, bbb, b, q_1)\}$

Tvrdíme, že $M(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Totiž, a-prekladač M očakáva na vstupe najskôr symboly ~~b a potom symboly c~~ c, inak ~~sa zasekne. To však znamená, že $M(L) = M(L \cap c^* b^*) = M(\{$ $M(L \cap b^* c^*) = M(\{b$~~ c a potom symboly b, inak sa zasekne. To však znamená, že $M(L) = M(L \cap c^* b^*) = M(\{c^n b^{3n+2} \mid n \in \mathbb{N}\})$. Avšak, a-prekladač najskôr v q_0 nahradí všetky c-čka a-čkami, potom prejde do q_1, počas čoho vymaže dve b-čka, a následne každé 3 b-čka nahradí jedným. Preto $M(L) = M(\{c^n b^{3n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{R}$. A keďže zobrazenie a-prekl. je zobrazí regulárny jazyk na regulárny, tak ak by $L \in \mathcal{R}$, tak aj $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{R}$, spor. ∎

105

(2) Lukáš Gaborik

Uvažujme slová $\varepsilon, a, a^2, \dots, a^{1987}$ (čiže a^i pre $0 \leq i < 1988$). Potom, ak by pre $i \neq j \in \mathbb{Z}_{1988}$ platilo $a^i R_L a^j$, tak z definície R_L musí nutne platiť $a^i \cdot a^{1988+7-i} \in L \iff a^j \cdot a^{1988+7+i}$. Avšak,
$a^i \, a^{1988+7-i} = a^{1988+7}$ a $\#_a(a^{1988+7}) = 1988+7 \equiv 7 \pmod{1988}$, čiže $a^i \cdot a^{1988+7-i} \in L$. Preto nutne $a^j \cdot a^{1988+7-i} = a^{1988+7+j-i} \in L$.
To však znamená, že $7 \equiv \#_a(a^{1988+7+j-i}) \equiv 1988+7+j-i \pmod{1988}$, čiže $j-i \equiv 0 \pmod{1988} \iff j \equiv i \pmod{1988}$. Avšak, keďže $i,j \in \mathbb{Z}_{1988}$, tak nutne $i=j$, čo je spor. To znamená, že žiadne dve zo slov $\{a^i \mid i \in \mathbb{Z}_{1988}\}$ nie sú v rovnakej triede ekvivalencie R_L, preto má R_L aspoň 1988 tried ekvivalencie. Dôsledkom Myhill-Nerodeovej vety však je, že minimálny DKA má práve toľko stavov, koľko je tried ekvivalencie R_L, a teda aspoň 1988. $\square$

105

Def. homomorfizmus
$before(a) = \#a \quad \forall a \in \Sigma$
$after(a) = a\# \quad \forall a \in \Sigma$
$erase(x) = \begin{cases} x & \forall x \in \Sigma \\ \varepsilon & x = \# \end{cases}$

3. Lukáš Gátorík

Nech (X,Y) je inštancia RMPKP taká, že požadujeme $i_1 = 1$, $i_2 = 2$.
Potom zostrojme (X',Y') inštanciu PKP takú, že

$$\forall\, 1 \le i \le n: \quad x_i' = before(x_i), \quad y_i' = after(y_i)$$
$$x'_{n+1} = \#\#, \quad y'_{n+1} = \#$$
$$x'_{n+2} = \#\, before(x_1 x_2), \quad y'_{n+2} = \#\, after(y_1 y_2)$$

Tvrdíme, že (X,Y) má riešenie $\iff$ (X',Y') má riešenie.

„$\Rightarrow$": nech $(1, 2, i_3, \dots, i_k)$ je riešením RMPKP(X,Y). Potom, keďže $x_1 x_2 x_{i_3} x_{i_4} \dots x_{i_k} = y_1 y_2 y_{i_3} y_{i_4} \cdots y_{i_k}$, tak aj $before(x_1 x_2 x_{i_3} \cdots x_{i_k})\#\# = before(y_1 y_2 y_{i_3} \dots y_{i_k})\#\#$.

$$before(x_1 x_2 x_{i_3} \dots x_{i_k})\#\# = before(y_1 y_2 y_{i_3} \cdots y_{i_k})\#\#$$
$$before(x_1 x_2)\, before(x_{i_3}) \cdots before(x_{i_k})\#\# = \#\, after(y_1 y_2)\, after(y_{i_3}) \cdots after(y_{i_k})\#$$
$$x'_{n+2}\, x'_{i_3} \cdots x'_{i_k}\, x'_{n+1} = y'_{n+2}\, y'_{i_3} \cdots y'_{i_k}\, y'_{n+1}$$

a teda $(n+2, i_3, \dots, i_k, n+1)$ je riešením (X',Y') PKP.

„$\Leftarrow$": nech $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ je riešením PKP (X',Y'). Zároveň uvažujme BUNV, že $\nexists\, j < k$ také, že $(i_1, \dots, i_j)$ je riešením (X',Y') - inými slovami, máme v nejakom zmysle „najkratšie" riešenie. ~~Potom~~

Ak by $i_1 = n+1$, druhé domino by muselo začínať na dolnom poschodí #. To spĺňajú iba posledné dve. Ak by bolo $i_2 = n+2$ ~~posledné, dosta~~ dostaneme hore 3# na začiatku a dole iba 2, spor. Preto nutne $(i_1, i_2, \dots, i_k) = (n+1, n+1, \dots, n+1)$, čo by však znamenalo rôzne dĺžky, spor. Preto nutne $\boxed{i_1 = n+2.}$ Následne sa nám striedajú po jednom # a symboly z Σ, pričom invariant je, že horný riadok končí symbolom z Σ, dolný #. Aby sa to nepokazilo, nemôžeme opäť použiť $(n+2)$-hé domino. Zároveň, akonáhle použijeme domino $n+1$, musí horné ## prislúchať dolnému ##, a teda sme museli skončiť v rovnakej vzdialenosti. Preto, ak $i_l = n+1$, tak nutne $\boxed{l = k}$. Čiže $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{n+2\} \times \{1, 2, \dots, n\}^{k-2} \times \{n+1\}$. Potom ale

$$erase(x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_k}) = erase(y'_{i_1} y'_{i_2} \cdots y'_{i_k})$$

$$x_1 x_2 x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} \cancel{\#\#} = y_1 y_2 y_{i_2} \cdots y_{i_{k-1}}$$

a teda $(1, 2, i_2, \dots, i_{k-1})$ je riešením (X,Y) RMPKP. $\square$

#a#a
b#b#a#

#b # c
b c#a#

#a#c
a#

#b #a
b#c#a#

##
#

#a#a#b#c
#b#b#a#c#a#

10