FOJA (1), TRETIA SADA BODOVANÝCH DOMÁCICH ÚLOH, ÚLOHA 2

**Patrícia Vnenčáková**, 2INF2

15.11.2021

---

**Úloha 2.** Nech $L = \{u\#v \mid u, v \in \{a,b\}^*;\ \#_a(u) = \#_b(v)\}$. Rozhodnite, či platí $L \in \mathcal{R}$. Samozrejme sa očakáva, že vaše tvrdenie poriadne dokážete.

---

Tvrdím, že $L \notin \mathcal{R}$. Pri dôkaze budeme používať pumpovaciu lemu, preto si napíšeme najskôr jej znenie.

*Pumpovacia lema:* Ku každému regulárnemu jazyku $L$ existuje číslo $p$ také, že pre každé slovo $w \in L$ také, že $|w| \geq p$ existujú $x, y, z \in \Sigma_L^*$ také, že platí:

(i) $w = xyz$

(ii) $|xy| \leq p$

(iii) $|y| \geq 1$

(iv) $\forall i \geq 0; xy^iz \in L$

Dokážeme, že jazyk $L$ nie je regulárny.
Sporom.

Nech $L \in \mathcal{R}$. Potom pre $L$ platí pumpovacia lema, podľa ktorej existuje $p$ také, že každé slovo z $L$ dlhšie ako $p$ sa dá nejako rozdeliť a napumpovať.
Uvažujme slovo $w = a^p\#b^p$. Je zjavné, že $w \in L$. Podľa $(i)$

$$w = xyz = a^p\#b^p.$$

Z $(ii)$ a $(iii)$ vyplýva, že $x, y$ sú tvorené len písmenami $a$. Bude teda platiť

$$x = a^j, y = a^k, z = a^{p-j-k}\#b^p \text{ pre nejaké } j \geq 0, k > 0, j + k \leq p$$

Potom ale podľa $(iv)$

$$xy^2z = a^ja^{2k}a^{p-j-k}\#b^p = a^{p+k}\#b^p \in L.$$

Keďže $k > 0$ tak neplatí, $a^{p+k}\#b^p \in L$, čo je SPOR.

Sporom sme dokázali, že $L \notin \mathcal{R}$.