Kapitola: Vyčísliteľné čísla

V tejto kapitole sa budeme zaoberať vyčísliteľnými číslami, t. j. reálnymi číslami, ktoré vieme algoritmicky určiť s ľubovoľnou presnosťou.

Uvedieme dva ekvivalentné spôsoby, ako tieto čísla definovať.

Intuitívna definícia. Takto pôvodne vyčísliteľné čísla definoval Alan Turing:

Nezáporné reálne číslo x voláme vyčísliteľné, ak existuje program počítajúci nasledujúcu funkciu f_x:

$$f_x(n) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \leftarrow n = 0 \\ n\text{-tá desatinná cifra } x & \leftarrow n > 0 \end{cases}$$

Moderná definícia. Takto sa zvyknú vyčísliteľné čísla definovať v súčasnosti:

Nezáporné reálne číslo x voláme vyčísliteľné, ak existuje program počítajúci funkciu f_x s nasledujúcou vlastnosťou:

$$\forall n \geq 1 : \quad \frac{f_x(n) - 1}{n} \leq x \leq \frac{f_x(n) + 1}{n}$$

A pre poriadok, komplexné číslo $a + bi$ voláme vyčísliteľné, ak sú vyčísliteľné aj číslo $|a|$, aj číslo $|b|$.

Teda voľne povedané, vyčísliteľné čísla sú tie, ktoré vieme algoritmicky vypočítať s ľubovoľnou presnosťou, na ľubovoľne veľký počet desatinných miest.

Teda napr. ak chceme ukázať, že číslo $\pi \simeq 3.1415926$ je vyčísliteľné, potrebujeme ukázať, že existuje program, ktorý pre vstup n vypíše na výstup n-tú cifru π. Teda pre vstup 0 by mal vypísať 3, pre vstup 1 vypísať 1, pre vstup 2 vypísať 4, atď. (Takéto programy pre π skutočne existujú, viď napr. http://en.wikipedia.org/wiki/Computing_%CF%80.)

1.1 Ktoré čísla sú vyčísliteľné?

- Zjavne ľubovoľné racionálne číslo je vyčísliteľné.
- Všetkých možných programov je len spočítateľne veľa, preto aj vyčísliteľných čísel je len spočítateľne veľa.
- Čísla, ktoré vieme dostať ako korene polynómov s celočíselnými koeficientami, voláme *algebraické*. Dá sa dokázať, že všetky algebraické čísla sú vyčísliteľné.

  Príklady algebraických čísel: 47, $-5/3$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{7}/5$, $\sqrt[3]{4 + \sqrt{7}}$, zlatý rez: $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, všetky komplexné odmocniny z 1, všetky vzdialenosti zostrojiteľné z úsečky dĺžky 1 pomocou kružidla a lineáru...

  Pre zaujímavosť, algebraické čísla tvoria pole, teda sú uzavreté na bežné aritmetické operácie. Navyše platí, že korene ľubovoľného polynómu, ktorého koeficienty sú algebraické, sú tiež algebraické.
- Čísla, ktoré nie sú algebraické, voláme *transcendentné*. Známe transcendentné čísla sú napríklad π (pomer obsahu a obvodu kruhu) a e (konštanta pre ktorú je exponenciála rovná svojej derivácii).

  Niektoré transcendentné čísla (vrátane π a e) sú tiež vyčísliteľné. Ale samozrejme všetkých transcendentných čísel je nespočítateľne veľa, takže skoro žiadne z nich vyčísliteľné nie je.

1.2 Konštruktivizmus v matematike

Prečo sú vyčísliteľné čísla zaujímavé?

Jedným z takpovediac filozofických smerov v matematike je konštruktivizmus. Zástupcovia tohto smeru majú za cieľ budovať „tú matematiku, ktorá by čo najpresnejšie zodpovedala nášmu svetu“. Aj v rámci samotného konštruktivizmu samozrejme existuje ďalšie delenie, ale základnou spoločnou črtou je, že konštruktivisti pripustia existenciu objektu len vtedy, ak ho naozaj vieme zostrojiť. (Nestačí teda napr. vychádzať z jeho neexistencie a dospieť k sporu.)

Z pohľadu niektorých konštruktivistov sú problematické už aj veci ako nespočítateľne veľké nekonečno a konkrétne aj množina reálnych čísel. Jediné nekonečno, ktoré sa podľa nich vyskytuje vo svete okolo nás, je nekonečno spočítateľné, a aj to len v podobe nekonečna potenciálneho – teda nie ako niečo, čoho je nekonečne veľa, ale len ako možnosť ísť ďalej, nájsť ešte väčšie číslo, nájsť ešte presnejšiu aproximáciu, a pod.

A práve vyčísliteľné čísla sú z pohľadu mnohých konštruktivistov tou hranicou, tým najzložitejším, čo ešte zodpovedá skutočnému svetu.

1.3 Table-maker's dilemma

Linka so stručným vysvetlením, aký technický problém mala pôvodná Turingova definícia.

`http://en.wikipedia.org/wiki/Table-maker%27s_dilemma#The_table-maker.27s_dilemma`

1.4 Chaitinova „konštanta“

Rovnako ako vlastne všade v matematike, aj pri vyčísliteľných číslach sa stretáme so skutočnosťou, že množina toho, čo vieme popísať, definovať, je ostro väčšia ako množina toho, čo vieme dokázať, vypočítať, o čom vieme uvažovať.

Existujú teda reálne čísla, ktoré síce vieme definovať, ale nie sú vyčísliteľné.

Príkladom takéhoto čísla je Chaitinova „konštanta“. Jej definícia je postavená na probléme zastavenia, a úvodzovky sme použili preto, že presná hodnota tohto čísla závisí od použitého modelu vypočítateľnosti.

Definovať ju môžeme napríklad nasledovne:

Uvažujme nejaký konkrétny model vypočítateľnosti (napr. Turingove stroje) a zvoľme si nejaké prefix-free kódovanie programov do abecedy $\{0, 1\}$.

(Prefix-free znamená, že žiaden kód programu nesmie byť prefixom iného kódu programu. Toto je technická záležitosť, ktorej význam bude o chvíľu zrejmý. Dodajme ešte, že ide o celkom prirodzenú syntaktickú požiadavku. Napr. všetky Pascalovské programy končia sekvenciou `end.`, ktorá sa nesmie vyskytnúť inde ako na konci – preto keď vezmeme ASCII kódy programov ako postupnosti bitov, dostaneme prefix-free kód.)

Pozrime sa teraz na to, čo naše programy robia na prázdnom vstupe (resp. ak uvažujeme programy počítajúce čiastočné funkcie, čo robia pre vstup 0). Niektoré z nich zastanú, niektoré nie. Nech Z je množina kódov tých programov, ktoré zastanú.

Chaitinova konštanta Ω pre tento model a toto kódovanie je definovaná nasledovne:

$$\Omega = \sum_{z \in Z} 2^{-|z|}$$

Keďže kódovanie, ktoré sme použili, je prefix-free, z Kraftovej-McMillanovej nerovnosti vyplýva, že $\Omega \in [0, 1]$.

Toto číslo zjavne nemôže byť vyčísliteľné, lebo keby sme mali algoritmus, ktorý vie vypočítať ľubovoľnú jeho cifru, vedeli by sme v dotyčnom modeli rozhodnúť problém zastavenia.

Za povšimnutie ešte stojí nasledujúce pozorovanie. Všetky syntakticky korektné kódy programov si môžeme predstaviť ako jeden obrovský binárny strom (rovnako, ako sa znázorňujú prefix-free kódy v kódovaní). Teraz si môžeme predstaviť, že ideme náhodne vygenerovať program nasledovne: Začneme v koreni stromu a dokola opakujeme: hodíme si mincou a podľa výsledku sa pohneme do ľavého alebo pravého syna. Tento proces skončí vo chvíli, keď už želaný pohyb nevieme vykonať. (Buď preto, že sme práve zostrojili korektný program, alebo preto, že sme vyrobili reťazec, ktorý už určite nie je prefixom žiadneho korektného programu.)

Chaitinova konštanta Ω udáva pravdepodobnosť toho, že týmto procesom dostaneme syntakticky korektný program, ktorý navyše na prázdnom vstupe zastane.

Populárne sa toto pozorovanie niekedy formuluje: „Chaitinova konštanta je pravdepodobnosť, že náhodne zvolený program zastane.“ (Viete uviesť aspoň jednu významnú výhradu voči tejto zjednodušenej formulácii?)