

**Pravidlá**

Riešenia tejto písomnej skúšky je potrebné odovzdať do **soboty 26. 1. 2019, 10:00** e-mailom na [misof@ksp.sk](mailto:misof@ksp.sk). Ak odovzdávate viacero súborov, zozipujte ich prosím. Počas riešenia priebežne **sledujte oznamy** na webstránke predmetu.

Smiete využívať ľubovoľné neživé zdroje informácií ktoré existovali v okamihu začiatku písomky. Pochopiteľne, vrátane všetkého zverejneného na stránke predmetu. Až do deadline je zakázané akýmkoľvek spôsobom diskutovať o úlohách s kýmkoľvek živým. Použité externé zdroje dostatočne **adekvátne citujte**. Čo viete odcitovať, netreba rozpisovať. Ak ste pri riešení úlohy písali program, odovzdajte aj ten.

Do hodnotenia sa vám započíta **5 najlepšie vyriešených** úloh. Zapísaniu známky môže predchádzať rozhovor o niektorých úlohách ktoré ste riešili.

**0 Nultá podúloha**

Do textu riešenia nezabudnite prosím vyplniť dva údaje: celé meno a **odhadovaný čistý čas** (v hodinách) strávený riešením úloh. Tento údaj **nebude mať vplyv na hodnotenie**, chcem ho kvôli lepšej kalibrácii úloh v budúcnosti.

**1 Najobyčajnejší BST**

Navrhňte algoritmus, ktorý bude zo vstupu čítať postupnosť  $n$  čísel a postupne ich jedno po druhom vkladá do úplne najobyčajnejšieho binárneho vyhľadávacieho stromu, bez akéhokoľvek vyvažovania. Pre každé  $k$  teda musí platiť, že po spracovaní prvých  $k$  čísel zo vstupu máte niekde v pamäti BST obsahujúci týchto  $k$  čísel a vyzerajúci presne tak, ako by vyzeral, keby ste tie čísla doň vkladali klasickým algoritmom.

Here's the catch: Celé to dokopy musí zbehnúť vo worst-case čase  $O(n \log n)$ , bez ohľadu na to, aké čísla prídu na vstupe. (Smiete samozrejme používať ľubovoľné ďalšie dátové štruktúry. Môžete pre jednoduchosť predpokladať, že čísla na vstupe sú navzájom rôzne.)

**2 M-NIM**

Nech  $M$  je ľubovoľná podmnožina prirodzených čísel. Hra  $M$ -NIM sa hrá rovnako ako hra NIM, s jediným pravidlom navyše: počet kamienkov, ktoré hráč v jednom ťahu odoberie z niektorej z kôpok, musí vždy patriť do množiny  $M$ .

(Príklady: N-NIM je klasický NIM. V hre  $\{7, 11\}$ -NIM je pozícia  $(4, 3, 13)$  vyhrávajúca, lebo hráč na ťahu môže napríklad odobrať sedem kamienkov z tretej kôpky a tým dostane súpera do pozície, z ktorej už tento nemá žiaden platný ťah.)

Nech  $M_1$  je množina obsahujúca číslo 1 a všetky prvočísla. Ako presne vyzerajú vyhrávajúce a prehrávajúce pozície pre hru  $M_1$ -NIM?

Nech  $M_2$  je ľubovoľná podmnožina  $M_1$  taká, že  $\{1, 2, 3\} \subseteq M_2$ . Čo viete povedať o vyhrávajúcích a prehrávajúcích pozíciách pre hru  $M_2$ -NIM?

**3 Gotta catch them all!**

Existuje 150 typov pokémonov. Na začiatku máš jedného, ktorého si vyberieš. Keď beháš po svete, pri každom encounteri stretneš rovnomerne náhodne zvolený typ pokémona. Ak už takého máš, necháš ho ujsť. Ak takého ešte nemáš, pokúsiš sa ho chytiť. To povedie k nasledovnému: S pravdepodobnosťou 50 percent ho zvládneš chytiť, s pravdepodobnosťou 49 percent sa nič nestane a pokémon utečie, a s pravdepodobnosťou 1 percento ti tento pokémon rozbije pokéball a utečie ti nielen on, ale aj polovica pokémonov z pokéballu (zaokrúhlené nadol; utečú tí, čo boli v pokéballu najkratšie).

Aký je očakávaný počet encounterov kým chytiš do pokéballu pokémony všetkých 150 typov? Vypočítajte presnú odpoveď, alebo aspoň (za trochu menej bodov) popíšte algoritmus, ktorý ju vypočíta.

**4 Bonboniéra**

Peťka a Janko sa rozhodli, že si kúpia bonboniéru a zjedia ju. Vybrali si takúto: <https://www.cokoladniatelje.si/image/cache/data/catalog/bonb006-bonboniera-gold-300g-1-600x600.jpg>.

O to, kto platí, sa zahrajú. Počas hry budú na striedačku jesť bonbóny. Peťka, ktorá ide prvá, môže zjesť ľubovoľný bonbón. Každý ďalší bonbón musí stranou susediť s predchádzajúcim zjedeným bonbónom. Kto nemá platný ťah, prehráva. Ak nejaké bonbóny zvýšili, doje ich víťaz.

a) Kto vyhrá a prečo?

b) Ako sa zmení odpoveď na a), ak dovolíme pokračovať aj bonbónom, ktorý s predchádzajúcim susedí rohom?

c) Ako sa zmení odpoveď na a), ak pred začiatkom hry najskôr ponúknu Žabu a ten zje dva bonbóny z protíľahlých rohov bonboniéry? (Bez zmeny pravidiel uvedenej v podúlohe b).)

**5 Stromopodvodovo**

Daný je neorientovaný strom v ktorom má každá hrana danú nejakú kladnú dĺžku. Nájdite čo najefektívnejší (za netriviálne body: lepší ako kvadratický) algoritmus, ktorý vypočíta priemernú vzdialenosť dvojice rôznych vrcholov stromu.

## 6 Kruhy na bitmape

Bola raz jedna trieda, v tej triede bola tabuľa. Tá tabuľa bola elektronická a pixelov mala veľa:  $8000 \times 6000$ . Na začiatku bol na tabuli náhodný šum čiernych a bielych pixelov. Potom nejaký expert zobral nástroj „vyplnený čierny kruh so stredom na pixeli kam kliknem a polomerom 100 pixelov“ a poklikal ním na rôzne miesta tejto bitmapy – vždy tak, aby celý kruh ležal vnútri. Kliknutia mohli byť aj blízko pri sebe, kruhy na tabuli sa teda môžu veselo prekrývať.

Chceli by ste napísať program, ktorý na vstupe dostane aktuálnu tabuľu ako bitmapu a (na bežnom počítači za pár sekúnd) zistí, na ktoré pixely dotyčný expert poklikal. (Resp. ak to nie je jednoznačné, tak chceme ľubovoľnú odpoveď uveriteľne konzistentnú so vstupom a vyššie uvedeným popisom.) Ako na to?

## 7 Pekné čísla

Číslo 167116 je pekné, lebo každé dvojčísle v ňom (16, 67, 71, 11 a 16) je buď štvorec alebo prvočíslo. Koľko je  $n$ -ciferných pekných čísel?