

Pravidlá

Riešenia tejto písomnej skúšky je potrebné odovzdať do **štvrtku 25. 1. 2018, 10:00** e-mailom na misof@ksp.sk. Ak odovzdávate viacero súborov, zozipujte ich prosím. Počas riešenia priebežne **sledujte oznamy** na webstránke predmetu.

Smiete využívať ľubovoľné neživé zdroje informácií ktoré existovali v okamihu začiatku písomky. Pochopiteľne, vrátane všetkého zverejneného na stránke predmetu. Až do deadline je zakázané akýmkoľvek spôsobom diskutovať o úlohách s kýmkoľvek živým. Použité externé zdroje dostatočne **adekvátne citujte**. Čo viete odcitovať, netreba rozpisovať. Ak ste pri riešení úlohy písali program, odovzdajte aj ten.

Do hodnotenia sa vám započíta **5 najlepšie vyriešených** úloh. Zapísaniu známky môže predchádzať rozhovor o niektorých úlohách ktoré ste riešili.

0 Nultá podúloha

Do textu riešenia nezabudnite prosím vyplniť dva údaje: celé meno a **odhadovaný čistý čas** (v hodinách) strávený riešením úloh. Tento údaj **nebude mať vplyv na hodnotenie**, chcem ho kvôli lepšej kalibrácii úloh v budúcnosti.

1 Kocka

Máme 100-stennú kocku, jej steny majú na sebe čísla od 1 po 100. Pri každom hode kockou padne jedno z týchto čísel. Výsledky sú uniformne distribuované a navzájom nezávislé.

- Hádzeme kockou dovtedy, kým nám každé číslo od 1 po 100 padne aspoň raz. Aká (presne) je stredná hodnota počtu hodov, ktoré spravíme?
- Hádzeme kockou dovtedy, kým nám každé číslo od 1 po **47** padne aspoň raz. Aká (presne) je stredná hodnota počtu hodov, ktoré spravíme?
- Hádzeme kockou dovtedy, kým nám každé číslo od 1 po 100 padne aspoň **dvakrát**. Aká (stačí na 9 platných cifier) je stredná hodnota počtu hodov, ktoré spravíme?

V častiach a+b môžete výsledok vyjadriť pomocou známych matematických konštánt.

V časti c odporúčam napísať program, ktorý príslušnú hodnotu vypočíta. Program, ktorý daný proces len simuluje, nebude mať dostatočnú presnosť, a teda nebude hodnotený v podstate žiadnymi bodmi.

2 Triminá

Nájdite algoritmus, ktorý pre dané n spočíta, koľkými spôsobmi vieme obdĺžnik rozmerov $6 \times n$ rozdeliť na $2n$ disjunktných oblastí, pričom každá oblasť musí byť súvislá a tvorená tromi jednotkovými štvorcami.

Ľubovoľný korektný algoritmus, ktorého časová zložitosť je polynomiálna od n , môže dostať plný počet bodov.

Technické detaily netreba rozpisovať, stačí sa sústrediť na „big picture“ – čo robíte, prečo váš algoritmus funguje a prečo je jeho časová zložitosť polynomiálna od n . Pre kalibráciu, v riešení by napr. bolo OK použiť vetu „pomocou backtrackingu vygenerujem všetky 7-prvkové permutácie bez pevného bodu“ bez rozpisovania detailov.

3 Sedem kôp

Dva hráči sa hrajú hru. Na začiatku hry majú jednu kopy ktorú tvorí n tokenov. Platný ťah hráča vyzerá tak, že si vyberie ľubovoľnú neprázdnu kopy a rozdelí ju ľubovoľným spôsobom na presne sedem menších neprázdnych kôp. (Vybrať si teda môže len takú kopy, na ktorej je aspoň sedem tokenov.)

Hra končí, keď už hráč na ťahu nevie spraviť platný ťah. Hráč, ktorý nemá ako spraviť ťah, prehráva.

Zistite, kto vyhrá (v závislosti od n) ak obaja hráči hrajú optimálne.

4 Cviká

V zimnom semestri boli tri krúžky prvákov. Každý krúžok mal cviko z analýzy s iným cvičiacim.

V letnom semestri bude opäť každý cvičiaci mať jedno cviko. Aby bola výuka rovnomernejšia, bolo zavedené pravidlo, že žiadny študent nesmie v letnom semestri ísť k tomu istému cvičiacemu, ktorého mal v zime.

Navyše je verejne známy zoznam dvojíc študentov, ktorí nesmú byť spolu na cviku, lebo by všetkých vyrušovali.

Navrhňte čo najefektívnejší algoritmus, ktorý načíta rozdelenie študentov na cviká v zimnom semestri a zoznam „zakázaných dvojíc“ a nájde jedno možné rozdelenie študentov na cviká v letnom semestri (alebo zistí, že také rozdelenie neexistuje).

5 In medias meta-res

Popíšte postup (t.j. polynomiálny algoritmus), ktorým vieme k ľubovoľnej bezkontextovej gramatike G vyrobiť deterministický program, ktorý:

- Na vstupe dostane slovo w .
- Vždy zastane, pričom akceptuje práve vtedy, ak $w \in L(G)$.
- Má časovú zložitosť $O(|w|^{2.9})$.

(Pri odhade časovej zložitosti vyrobeného programu počet neterminálov gramatiky G považujeme za konštantu.)

Bonusový bod za vysvetlenie ako súvisí názov úlohy so samotnou úlohou :)

6 Mravce lozia!

Predstavte si „domček“ – taký ten klasický obrázok, ktorý sa kreslí jedným ťahom. Na domček sa môžeme dívať ako na rovinný graf so 6 vrcholmi. (Jeden z vrcholov je priesečník uhlopriečok štvorca.)

V domčeku máme miliardu mravcov. Na začiatku všetci sedia na vrchole strechy.

Mravce sa hýbu v taktach. V každom takte si každý mravec vyberie náhodne jednu hranu vedúcu z vrcholu, kde práve sedí, a prejde po nej. (Po prvom takte teda bude zhruba polovica mravcov na každom spodnom konci strechy. Na vrchu strechy bude prázdno.)

Ak necháme mravce po domčeku behať do nekonečna, platí, že sa počty mravcov v jednotlivých vrchoch približne ustália? Ak áno, na akých hodnotách? Ak nie, budú približné počty mravcov vo vrchoch pravidelne oscilovať (medzi viacerými dostatočne odlišnými stavmi), či sa budú meniť chaoticky?

7 Delitele

Označme p_n počet spôsobov, ako zapísať kladné číslo n v tvare $n = ab$, kde a, b sú kladné celé čísla. Napr. $p_4 = 3$ lebo $4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$. (Všimnite si, že záleží na poradí.)

Označme q_n počet spôsobov, ako zapísať kladné číslo n v tvare $n = ab + cd$, kde a, b, c, d sú kladné celé čísla. Napr. $q_4 = 8$, lebo máme $4 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3$ (štyri možnosti podľa toho kde je 3-ka) a $4 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2$ (dve možnosti pre a, b a dve pre c, d).

Pre kontrolu, $\sum_{n=1}^{100} p_n = 482$ a $\sum_{n=1}^{100} q_n = 90\,253$.

a) Čo najefektívnejším programom zistite hodnotu $\sum_{n=1}^{2\,000\,000} p_n$.

b) Čo najefektívnejším programom zistite hodnotu $\sum_{n=1}^{2\,000\,000} q_n$.

Body za časť b viete získať aj tak, že odovzdáte program, ktorý na vstupe dostane hodnoty p_n a z nich vypočíta hodnoty q_n . Áno, toto je hint.

Body za časť a viete získať aj bez výpočtu jednotlivých p_n , len vám to bude nanič pri riešení časti b.

V rozsahu, ktorý nás zaujíma, platí $\max_n q_n < 10^9$.