

Pravidlá

Riešenia tejto písomnej skúšky je potrebné odovzdať do **pondelka 30. 1. 2017, 10:00**, a to vo formáte PDF e-mailom na misof@ksp.sk. Počas riešenia priebežne **sledujte oznamy** na webstránke predmetu.

Smiete využívať ľubovoľné neživé zdroje informácií ktoré existovali v okamihu začiatku písomky. Pochopiteľne, vrátane všetkého zverejneného na stránke predmetu. Až do deadline je zakázané akýmkoľvek spôsobom diskutovať o úlohách s kýmkoľvek živým. Použité externé zdroje dostatočne **adekvátne citujte**. Čo viete odcitovať, netreba rozpisovať.

Do hodnotenia sa vám započíta **5 najlepšie vyriešených** úloh. Zapísaniu známky môže predchádzať rozhovor o niektorých úlohách ktoré ste riešili.

0 Nultá podúloha

Do textu riešenia nezabudnite prosím vyplniť dva údaje: celé meno a **odhadovaný čistý čas** (v hodinách) strávený riešením úloh. Tento údaj **nebude mať vplyv na hodnotenie**, chcem ho kvôli lepšej kalibrácii úloh v budúcnosti.

1 K-inverzie

Uvažujme reťazec $s_0 \dots s_{n-1} \in \{a, b\}^n$.

Pre takýto reťazec je inverziou každá dvojica indexov (i, j) taká, že $i < j$ a $s_i > s_j$ (čiže $s_i = b$ a $s_j = a$).

Ďalej, inverziu voláme k -inverziou, ak platí $j - i = k$.

Navrhňte algoritmus s časovou zložitnosťou lepšou ako $\Theta(n^2)$ ktorý načíta reťazec a pre každé k od 1 po $n - 1$ zistí počet k -inverzií v ňom. (Čím efektívnejší algoritmus, tým lepšie.)

Príklad: pre vstup *baba* chcete dať výstup „2 0 1“.

2 Kľúče a dvere

Pred vami stojí labyrint: neorientovaný n -vrcholový graf. Na niektorých hranách sú zamknuté dvere. V niektorých vrcholoch sú kľúče. Každý kľúč vie odomknúť každé dvere. Kľúč si môžete zobrať, keď prídete do nejakej miestnosti, kde sa nachádza. Odvtedy si ho môžete nosiť so sebou – teda viete odomknúť jedným kľúčom postupne veľa dvier. Pochopiteľne, kým nemáte kľúč, neviete prejsť po hrane, na ktorej sú dvere.

Pre každé i a j nás zaujíma nasledujúca otázka: „Ak vás zhodím do vrcholu i labyrintu a dám vám za úlohu dostať sa do vrcholu j , dá sa to, a ak áno, na koľko najmenej prechodov hranou?“ Navrhňte algoritmus, ktorý spočíta odpovede na všetky tieto otázky. Každé polynomiálne riešenie dostane body, ale na plný počet bodov treba celkovú časovú zložitnosť lepšiu ako kubickú od n . (Ideálne teda chceme algoritmus ktorý aj na grafe s $\Theta(n^2)$ hranami nájde riešenie v čase $o(n^3)$.)

Hint: V koľkých rôznych stavoch (a akých) sa môžete počas blúdenia nachádzať?

3 Vodný slalom

Vo vodnom slalome má trať n bránok, pričom každá je poprúdna alebo protiprúdna. Protiprúdna brány by nemali byť pričasté. Predpokladajme, že medzi každými piatimi po sebe idúcimi bránami chceme nanajvýš dve protiprúdna. Koľko existuje spôsobov (asymptoticky, v závislosti od n) ako sa rozhodnúť, ktoré bránky budú protiprúdna?

4 Slučky

Na liste papiera je vyznačených n bodov. Dvaja hráči sa na tomto papieri hrajú hru. Hráč na ľahu musí nakresliť uzavretú krivku, ktorá nekrižuje ani sa nikde nedotýka ani sama seba, ani žiadnej zo skôr nakreslených kriviek. Navyše musí platiť, že každá nakreslená krivka musí prechádzať **presne jedným, presne dvomi, alebo presne piatimi** z vyznačených bodov.

a) Ktorý hráč vyhrá hru, ak začínajú s čistým papierom s n bodmi a obaja hrajú optimálne?

Hint: Existuje veľmi stručný argument. Čo sa stane v prvom ľahu?

b) Navrhňte čo najefektívnejší algoritmus, ktorý dostane na vstupe vhodne zadanú pozíciu, ktorá mohla vzniknúť počas hry (nie nutne optimálne hrajúcich hráčov) a ktorý vyhodnotí, ktorý hráč má v danej pozícii vyhrávajúcu stratégiu.

5 Minimá

V cyklickej časovke ide súťažiť n pretekárov. Na začiatku sa náhodne vyžrebuje, v akom poradí štartujú. V cieľi je veľký trón, na ktorom sedí najlepší spomedzi pretekárov, ktorí už prišli do cieľa. Aká je očakávaná hodnota počtu pretekárov, ktorí sa vystriedajú na tróne počas pretekov?

6 Vkladanie do BST

Máme pole $A[0..n-1]$, v ktorom platí $\forall i : A[i] = i$. Spravíme random shuffle prvej polovice poľa. Následne spravíme random shuffle druhej polovice poľa. Potom zoberieme prázdny binárny vyhľadávací strom (obyčajný, bez akéhokoľvek vyvažovania) a v poradí od $i = 0$ po $n - 1$ doň vložíme hodnotu $A[i]$. Aká je očakávaná časová zložitnosť celého tohoto postupu?

Hint: Odpoveď na túto úlohu môže využívať odpoveď na predchádzajúcu úlohu. Presnejšie, ak to potrebujete, vaše riešenie tejto úlohy sa môže odvolať na riešenie predchádzajúcej úlohy, a to aj ak ho nepoznáte.

7 Skoro kostra

Máme daný súvislý neorientovaný graf. Každá hrana má reálne ohodnotenie. Chceme nájsť najlacnejší súvislý podgraf obsahujúci všetky vrcholy nášho grafu. (Príklady: Ak majú všetky hrany kladné ohodnotenie, odpoveďou je najlacnejšia kostra. Ak majú všetky hrany záporné ohodnotenie, odpoveďou je celý graf.)

Definujte matroid zodpovedajúci tomuto problému. Dokážte, že naozaj ide o matroid. Stručne popíšte pažravý algoritmus, ktorý túto úlohu optimálne vyrieši.