Pravidlá

Riešenia tejto písomnej skúšky je potrebné odovzdať do **stredy 27. 1. 2016, 12:00**, a to buď vo formáte PDF e-mailom na `misof@ksp.sk` alebo na papieri. Papierové riešenia sa dajú odovzdávať v stredu od 9:30 v akvárku II, a keď už nie som tam, tak som v M-263. Počas riešenia priebežne **sledujte oznamy** na webstránke predmetu.

Smiete využívať ľubovoľné neživé zdroje informácií ktoré existovali v okamihu začiatku písomky. Pochopiteľne, vrátane všetkého zverejneného na stránke predmetu. Až do deadline (a to bez ohľadu na to, kedy odovzdáte svoje riešenia) je zakázané akýmkoľvek spôsobom diskutovať o úlohách s kýmkoľvek živým.
Použité externé zdroje dostatočne **adekvátne citujte**. Čo viete odcitovať, netreba rozpisovať.
Do hodnotenia sa vám započíta **5 najlepšie vyriešených** úloh. Zápisaniu známky môže predchádzať rozhovor o niektorých úlohách ktoré ste riešili.

0 Nultá podúloha

Do textu riešenia nezabudnite prosím vyplniť dva údaje: celé meno a **odhadovaný čistý čas** (v hodinách) strávený riešením úloh. Tento údaj **nebude mať vplyv na hodnotenie**, chcem ho kvôli lepšej kalibrácii úloh v budúcnosti.

1 NIM s trojkou

NIM3 je hra pre dvoch hráčov, ktorá sa hrá s niekoľkými kôpkami kamienkov. Hráč na ťahu si vždy vyberie kôpku a odoberie z nej nejaký kladný počet kamienkov. Pritom platí obmedzenie, že počet kamienkov odobratých v každom ťahu musí obsahovať cifru 3. (Odobrať teda vieme napr. 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, ... kamienkov.) Kto nevie spraviť platný ťah, prehráva.

A) Ak sú na začiatku 4 kôpky a na každej 470 kamienkov, ktorý hráč má vyhrávajúcu stratégiu a akú?
B) A čo ak je na začiatku 5 kôpok a na každej 470 kamienkov?
C) Uvažujme 5 kôpok s veľkosťami 470, 471, 472, 473, 474. Táto pozícia je vyhrávajúca pre hráča na ťahu.
Koľko spomedzi všetkých možných prvých ťahov vedie k výhre prvého hráča, ak obaja hráči hrajú optimálne?
(Plný počet bodov za správne číslo zistené programom, čiastočné body za popis algoritmu, ktorý by ho spočítal.)

2 Slabá súvislosť

Orientovaný graf voláme *slabo súvislý* ak pre každú dvojicu vrcholov u, v platí, že medzi nimi aspoň jedným smerom existuje cesta. (Teda dá sa dostať z u do v, alebo z v do u, alebo dokonca oboma smermi.) Navrhnite optimálny algoritmus ktorý overí, či je daný graf slabo súvislý.
Dá sa každý graf rozdeliť na slabo súvislé komponenty? Ak áno, definujte ich a nájdite optimálny algoritmus, ktorý to spraví.

3 Prime ribs

Vybrali sme rovnomerne náhodne dve **rôzne** prvočísla menšie ako 7 654 321. Nazvime ich p_1 a p_2.
Aká je očakávaná hodnota $|p_1 - p_2|$? A aká je najčastejšia hodnota $|p_1 - p_2|$? S akou pravdepodobnosťou ju uvidíme?

Všetky odpovede určite exaktne, preferujem zlomky v základnom tvare, prípadne reálne čísla s veľa desatinnými miestami. Približné výsledky získané simuláciou sú výborné pre vašu kontrolu, že neodovzdávate blbosť, ale veľa bodov za ne nebude. Odovzdajte aj postup, akým ste dosiahnuté výsledky získali, hodnotí sa aj efektívnosť použitého algoritmu.

Hint: Ako efektívne zistiť, ktorej hodnote $p_1 - p_2$ zodpovedá koľko dvojíc prvočísiel?

4 Krátke vektory

Daná je konečná množina X obsahujúca n navzájom rôznych r-rozmerných vektorov nad poľom $\mathbb{R}$. Tieto vektory generujú nejaký podpriestor $\mathbb{R}^r$. Chceme nájsť množinu $Y \subseteq X$, ktorá generuje ten istý podpriestor ako celá množina X, a navyše platí, že súčet (Euklidovských) dĺžok vektorov v Y je najmenší možný. Navrhnite polynomiálny algoritmus, ktorý nájde Y.

5 Ananás

Šaňo má rád ananás. Uvažujme reťazce dĺžky ℓ nad abecedou $\{s, a, n, o\}$ ktoré **neobsahujú** slovo *ananas*. Nájdite čo najefektívnejší algoritmus, ktorý pre dané ℓ exaktne spočíta, koľko je takýchto reťazcov. Ďalej nájdite konštantu α takú, že počet reťazcov v závislosti od ℓ rastie rádovo tak rýchlo ako α^ℓ.
Hint: Ak tušíte ako začať, začnite tak. Ak vôbec netušíte, ako začať, predstavte si konečný automat.

6 Kos3

Daný je jednoduchý neorientovaný n-vrcholový graf s kladne ohodnotenými hranami. Ukážte, ako spočítať, koľko navzájom rôznych **najlacnejších** kostier má tento graf. (Netreba optimálne riešenie, stačí čokoľvek v polynomiálnom čase.)
Hinty: Keď má Kruskalov algoritmus na výber, koľko možností vznikne? Čo sa stane, keď majú všetky hrany rovnakú cenu?

7 Štyri figúrky

Na šachovnici rozmerov 100×100 máme 4 rovnaké kamene, každý na inom políčku. Kameňmi môžeme hýbať. V jednom ťahu si môžeme vybrať ľubovoľný jeden kameň a posunúť ho na stranou susediace prázdne políčko. Navyše sa dá aj skákať. Ak sú v nejakom riadku alebo stĺpci za sebou kameň, kameň a prázdne políčko, môžeme v jednom ťahu preskočiť prvým kameňom ponad druhý na prázdne políčko.

A) Dané sú dve konfigurácie kameňov. Navrhnite algoritmus, ktorý na bežnom počítači do sekundy zistí, či sa z prvej konfigurácie dá dosiahnuť druhá na nanajvýš 5 ťahov.
B) To isté, ale chceme vedieť, či to ide na nanajvýš 10 ťahov.