

Pravidlá

Riešenia tejto písomnej skúšky je potrebné odovzdať do **utorka 19. 1. 2016, 12:00**, a to buď vo formáte PDF e-mailom na misof@ksp.sk alebo medzi 9:00 a 12:00 osobne v posluchárni F1.

Počas riešenia je povolené využívať ľubovoľné neživé zdroje informácií ktoré existovali v okamihu, keď ste do rúk dostali jej zadanie (pochopte, vrátane všetkého zverejneného na stránke predmetu). Až do deadline (a to bez ohľadu na to, kedy odovzdáte svoje riešenia) je zakázané akýmkoľvek spôsobom diskutovať o úlohách s kýmkoľvek živým.

Použitie externé zdroje dostatočne **adekvátne citujte**. Čo viete odcitovať, netreba rozpisovať.

Do hodnotenia sa vám započíta **5 najlepšie vyriešených** úloh. Zapísaniu známky môže predchádzať rozhovor o niektorých úlohách ktoré ste riešili.

0 Nultá podúloha

Do textu riešenia nezabudnite prosím vyplniť dva údaje: celé meno a **odhadovaný čistý čas** (v hodinách) strávený riešením úloh. Tento údaj **nebude mať vplyv na hodnotenie**, chcem ho kvôli lepšej kalibrácii úloh v budúcnosti.

1 PEA-NIM

PEA-NIM je hra dvoch hráčov. Na začiatku hry sa na stole spraví n kôpok na ktorých je postupne a_1, \dots, a_n kamienkov a zvolí sa číslo $k \leq n$. Hráč na ťahu si vždy vyberie aspoň jednu a nanajvýš k kôpok a z každej vybratej kôpky odstráni ľubovoľný kladný (nie nulový) počet kamienkov. Hráč, ktorý už nevie spraviť platný ťah (keďže všetky kôpky sú prázdne) prehráva.

Nájdite čo najefektívnejší algoritmus, ktorý pre dané n, k a a_1, \dots, a_n zistí, či je dotyčná pozícia vyhrávajúca pre hráča na ťahu. (Hint: Chcete vhodne zovšeobecniť riešenie pre $k = 1$.)

2 Logika

Daný je výrok v tvare $(Q_1x_1)(Q_2x_2) \dots (Q_nx_n)\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde každé Q_i je kvantifikátor (buď \forall alebo \exists , v ľubovoľnom poradí) a kde $\varphi(\dots)$ je 2-CNF-SAT formula. Nájdite efektívny algoritmus ktorý zistí, či je tento výrok pravdivý.

3 Kombinatorika

Označme $S(n)$ počet spôsobov ako zapísať n ako súčet práve troch prvočísel, pričom záleží na poradí a navyše požadujeme, aby aspoň jedno z prvočísel malo v sebe podreťazec 47. Napr. $S(51) = 3$ lebo $51 = 2 + 2 + 47 = 2 + 47 + 2 = 47 + 2 + 2$. Nájdite $\sum_{n=1}^{1000000} (S(n))^2$. Áno, programom. Odovzdajte aj ten (a jeho stručný popis), nie len číslo.

4 Kombinatorika pre hackerov

Python má v sebe efektívnu implementáciu násobenia veľkých čísel. Popíšte, ako pomocou nej vyriešiť predchádzajúcu úlohu – bez toho aby ste museli (okrem samotného nájdania prvočísel) implementovať akýkoľvek pokročilý algoritmus. Stačí sa sústrediť na popis hlavnej myšlienky, nemusíte vyrobiť kompletný funkčný program.

(Kvôli horším konštantám neodporúčam použiť tento program na riešenie predchádzajúcej úlohy. Your call.)

5 Ježibaba

Ježibaba pozná niekoľko receptov. Všetky recepty sú nasledovného typu: „ak zoberieš elixír mladosti a povaríš ho s babím uchom, dostaneš elixír pravdovravnosti“. Existuje e rôznych elixírov a s rôznych surovín. Každá surovina má svoju cenu. Ježibaba by chcela lexikón, pomocou ktorého bude vedieť v *asymptoticky optimálnom čase* odpovedať na otázky nasledovného typu: „mám elixír pomáhajúci proti otlakom na nohách, chcem z neho spraviť elixír proti smradľavému dychu, akým postupom je to najlacnejšie?“

Popíšte, ako taký lexikón *čo najefektívnejšie* vyrobiť a ako podľa nej pre ľubovoľné dva elixíry zostrojíte (jeden ľubovoľný) optimálny postup v optimálnom čase (alebo oznámiť, že daná úloha nemá riešenie).

(Nikde nie je povedané, že by lexikón mal byť tvorený e^2 disjunktnými návodmi. Za ľubovoľné riešenie, ktorého čas predspracovania od e závisí lepšie ako kubicky, bude veľa bodov.)

6 Lo mem knapsack

Máme inštanciu klasického 0-1 knapsacku, teda n predmetov, každý s nejakou váhou w_i a cenou c_i , a máme maximálnu celkovú váhu w_{max} . Všetky w_i aj w_{max} sú kladné celé čísla neprevyšujúce 10^6 .

Chceli by sme nájsť jedno konkrétne optimálne riešenie (konkrétnu podmnožinu predmetov, nie len súčet ich cien). Máme však k dispozícii len $O(nw_{max})$ času a $O(w_{max})$ pamäte. Nájdite a dostatočne detailne popíšte algoritmus ktorý úlohu s týmito obmedzeniami vyrieši, alebo dokážte, že takýto algoritmus nemôže existovať.

7 Domček

Predstavte si „domček“ – taký ten klasický obrázok, ktorý sa kreslí jedným ťahom. Na domček sa môžeme dívať ako na rovinový graf so 6 vrcholmi. (Jeden z vrcholov je priesečník uhlopriečok štvorca.) Uvažujme všetky sledy dĺžky n , ktoré začínajú na vrchu strechy. Chceme vedieť, koľko ich je.

Ako by ste napísali čo najefektívnejší program, ktorý to pre dané n exaktne spočíta?

Asymptoticky koľko je tých sledov v závislosti od n ?