Riešenie druhej prémiovej úlohy

Peter Kostolányi

20. decembra 2017

Zadanie. Dôsledkom štandardnej konštrukcie zásobníkového automatu k bezkontextovej gramatike je, že ku každému $L \in \mathscr{L}_{CF}$ existuje zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ taký, že $N(A) = L$ a $|K| = 1$.

Zistite, či existuje konštanta $k \in \mathbb{N}$ taká, že ku každému bezkontextovému jazyku L existuje bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ taká, že $|N| \leq k$. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že taká konštanta k neexistuje. Pre každé prirodzené číslo $k \geq 1$ ukážeme, že na vygenerovanie (očividne regulárneho, a teda aj bezkontextového) jazyka

$$L_k = \{a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_{2k}^{n_{2k}} \mid n_1, n_2, \dots, n_{2k} \in \mathbb{N}\}$$

nad abecedou $\Sigma_k = \{a_1, \dots, a_{2k}\}$ je potrebná gramatika s aspoň k neterminálmi.

Nech $k \in \mathbb{N}$ je pevne dané a nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je *redukovaná*[1] bezkontextová gramatika taká, že $L(G) = L_k$. Pre každé $\alpha \in N$ označme

$$\lambda(\alpha) = \{c \in \Sigma_k \mid \exists u, v \in \Sigma_k^* : \alpha \Rightarrow^+ u\alpha v \ \wedge \ \#_c(u) \geq 1\}$$

a

$$\varrho(\alpha) = \{c \in \Sigma_k \mid \exists u, v \in \Sigma_k^* : \alpha \Rightarrow^+ u\alpha v \ \wedge \ \#_c(v) \geq 1\}.$$

Nech teraz $m = \max\{|x| \mid \xi \to x \in P\}$ a $p = m^{|N|+1}$. Rovnako ako v dôkaze pumpovacej lemy pre bezkontextové jazyky potom možno dokázať, že pre $i = 1, \dots, 2k$ musí existovať neterminál $\xi_i \in N$ taký, že $\sigma \Rightarrow^* x\xi_i z \Rightarrow^+ xu\xi_i vz \Rightarrow^* xuyvz = a_i^p$, kde $x, u, y, v, z \in \Sigma_k^*$ a $|uv| \geq 1$. Z toho je zrejmé, že musí platiť $a_i \in \lambda(\xi_i)$ alebo $a_i \in \varrho(\xi_i)$.

Keďže je gramatika G redukovaná, ľahko možno nahliadnuť, že keby niektorá z množín $\lambda(\alpha)$ alebo $\varrho(\alpha)$ obsahovala dva rôzne symboly $c, d \in \Sigma_k$, existovalo by v G odvodenie slova $x_1 c x_2 d x_3 c x_4$ pre nejaké $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \Sigma_k^*$, a teda $L(G) \neq L_k$. Preto pre všetky $\alpha \in N$ platí súčasne $|\lambda(\alpha)| \leq 1$ a $|\varrho(\alpha)| \leq 1$. Keďže ale ku každému terminálu c existuje neterminál α taký, že $c \in \lambda(\alpha)$ alebo $c \in \varrho(\alpha)$ a keďže terminálov je $2k$, z Dirichletovho princípu dostávame, že neterminálov musí byť aspoň k, čo bolo treba dokázať. $\square$

[1] Keďže štandardná konštrukcia na prevod gramatiky do redukovaného normálneho tvaru nepridáva žiadne neterminály, je tento predpoklad bez ujmy na všeobecnosti.