Preklad

Peter Kostolányi

11. apríla 2017

Základné definície

Intuitívne si pod realizáciou prekladu možno predstaviť ľubovoľnú transformáciu slov u nad nejakou abecedou Σ_1 na v určitom zmysle zodpovedajúce slová v nad nejakou (vo všeobecnosti avšak nie nutne) inou abecedou Σ_2. Niektoré slová u môžu mať aj viacero prípustných prekladov v; iné zas nemusia byť preložiteľné vôbec. Najvhodnejšou všeobecnou formalizáciou prekladu sa teda javí byť relácia $\Pi \subseteq \Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$, pričom $(u, v) \in \Pi$, ak v je prípustným prekladom slova u.

Definícia 1. Nech Σ_1 a Σ_2 sú abecedy. *Preklad* zo Σ_1^* do Σ_2^* je relácia $\Pi \subseteq \Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$.

Keďže je preklad definovaný ako relácia – množina dvojíc – je užitočné mať k dispozícii mechanizmus umožňujúci pristupovať k jednotlivým komponentom. Na tento účel možno využiť štandardný pojem i-tej *projekcie*.

Definícia 2. Nech $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sú množiny a $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pod *i-tou projekciou* na karteziánskom súčine $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ rozumieme zobrazenie $\mathrm{pr}_i \colon M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \to M_i$ dané pre všetky $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ ako $\mathrm{pr}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$. Túto definíciu možno prirodzeným spôsobom rozšíriť aj na relácie $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ – i-ta projekcia n-árnej relácie R je potom daná ako $\mathrm{pr}_i(R) = \{\mathrm{pr}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R\}$.

Nech teda Σ_1 a Σ_2 sú abecedy. Potom pre $(u, v) \in \Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ máme $\mathrm{pr}_1(u, v) = u$ a $\mathrm{pr}_2(u, v) = v$. Uvažujme teraz preklad Π daný ako $\Pi = \{(a^n b^n, a^n b^n c^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Potom $\mathrm{pr}_1(\Pi) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a $\mathrm{pr}_2(\Pi) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Prvá projekcia prekladu zo Σ_1^* do Σ_2^* je teda jazyk pozostávajúci zo všetkých slov nad abecedou Σ_1, ktoré majú aspoň jeden prípustný preklad. Druhá projekcia je zas jazyk obsahujúci všetky slová nad abecedou Σ_2, ktoré sú prípustným prekladom aspoň jedného slova nad abecedou Σ_1.

Preklad realizovaný a-prekladačom

A-prekladače sme až doposiaľ chápali predovšetkým ako zariadenia na transformáciu jazykov; pre daný a-prekladač M nás teda zaujímali najmä vlastnosti zobrazenia $L \mapsto M(L)$. Alternatívne je ale možné chápať a-prekladače aj ako zariadenia realizujúce preklad.

Definícia 3. Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač. *Preklad realizovaný a-prekladačom* M je relácia $\Pi(M) \subseteq \Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ daná ako

$$\Pi(M) = \{(u, v) \in \Sigma_1^* \times \Sigma_2^* \mid \exists q \in F : (q_0, u, \varepsilon) \vdash_M^* (q, \varepsilon, v)\}.$$

Preklady realizované a-prekladačmi sa niekedy zvyknú nazývať aj *racionálne relácie*. Pri takomto ponímaní možno a-prekladač považovať jednoducho za konečný automat nad monoidom $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ – teória a-prekladačov je tak jedným z hlavných východísk teórie automatov nad ľubovoľným monoidom.

Nasledujúci viac-menej očividný výsledok je užitočným nástrojom na dokazovanie, že daný preklad Π nie je realizovaný žiadnym a-prekladačom.

Lema 1. *Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač a $\Pi = \Pi(M)$. Potom sú obidva jazyky $\mathrm{pr}_1(\Pi)$ a $\mathrm{pr}_2(\Pi)$ regulárne.*

Dôkaz. Podľa tvrdenia dokázaného na treťom cvičení možno bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že a-prekladač M je v normálnom tvare takom, že $H \subseteq K \times (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \times (\Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}) \times K$. Ľahko potom vidieť, že pre nedeterministický konečný automat $A_1 = (K, \Sigma_1, \delta_1, q_0, F)$ s funkciou δ_1 danou pre všetky $p \in K$ a $x \in \Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}$ ako $\delta_1(p, x) = \{q \in K \mid \exists y \in \Sigma_2 \cup \{\varepsilon\} : (p, x, y, q) \in H\}$ platí $L(A) = \mathrm{pr}_1(\Pi)$. Pre nedeterministický konečný automat $A_2 = (K, \Sigma_2, \delta_2, q_0, F)$ s funkciou δ_2 danou pre všetky $p \in K$ a $y \in \Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}$ ako $\delta_2(p, y) = \{q \in K \mid \exists x \in \Sigma_1 \cup \{\varepsilon\} : (p, x, y, q) \in H\}$ zas platí $L(A) = \mathrm{pr}_2(\Pi)$. $\square$

Jednoduché prekladové schémy

Pod *jednoduchou prekladovou schémou* rozumieme bezkontextovú gramatiku, ktorá „pracuje na dvoch vetných formách naraz". Postupnosť neterminálov v oboch vetných formách musí byť počas celého odvodenia rovnaká – vetné formy sa teda môžu líšiť iba v termináloch.

V každom kroku odvodenia sa vyberie jeden výskyt neterminálu, ktorý sa prepíše v oboch vetných formách podľa niektorého pravidla prekladovej schémy. Takéto pravidlo má dve pravé strany, ktoré sú vo všeobecnosti rôzne – prvá pravá strana sa použije na prvú generovanú vetnú formu a druhá na druhú. Aby ale postupnosti neterminálov ostali v oboch vetných formách rovnaké aj po použití pravidla, budú za prípustné považované iba tie pravidlá, ktorých pravé strany majú rovnaké postupnosti neterminálov.

Definícia 4. *Jednoduchá syntaxou riadená prekladová schéma* alebo skrátene *jednoduchá prekladová schéma* je pätica $\mathcal{S} = (N, T_1, T_2, P, \sigma)$, kde N je abeceda neterminálov, T_1 a T_2 sú abecedy terminálov, $N \cap (T_1 \cup T_2) = \emptyset$, $\sigma \in N$ je počiatočný neterminál a $P \subseteq_{kon} N \times (N \cup T_1)^* \times (N \cup T_2)^*$ je množina prepisovacích pravidiel taká, že pre všetky $(\xi, x, y) \in P$ platí $h_N(x) = h_N(y)$, kde $h_N \colon (N \cup T_1 \cup T_2)^* \to N^*$ je homomorfizmus daný ako $h(\xi) = \xi$ pre $\xi \in N$ a $h(c) = \varepsilon$ pre $c \in T_1 \cup T_2$.

Poznámka 1. Podobne ako pri bezkontextových gramatikách zvyčajne zapisujeme prepisovacie pravidlá $(\xi, x, y) \in P$ ako $\xi \to (x, y)$. Zápis $\xi \to (x_1, y_1), \xi \to (x_2, y_2), \ldots, \xi \to (x_k, y_k)$ skracujeme ako $\xi \to (x_1, y_1) \mid (x_2, y_2) \mid \ldots \mid (x_k, y_k)$.

Definícia 5. Nech $\mathcal{S} = (N, T_1, T_2, P, \sigma)$ je jednoduchá prekladová schéma. *Krok odvodenia* v prekladovej schéme $\mathcal{S}$ je binárna relácia $\Rightarrow_{\mathcal{S}}$ na $(N \cup T_1)^* \times (N \cup T_2)^*$[1] taká, že

$$\begin{aligned}
&\forall u, u' \in (N \cup T_1)^* \ \forall v, v' \in (N \cup T_2)^* : (u, v) \Rightarrow_{\mathcal{S}} (u', v') \text{ práve vtedy, keď} \\
&\quad \exists u_1, u_2, x \in (N \cup T_1)^* \ \exists v_1, v_2, y \in (N \cup T_2)^* \ \exists \xi \in N : \\
&\qquad (u, v) = (u_1 \xi u_2, v_1 \xi v_2) \ \wedge \ (u', v') = (u_1 x u_2, v_1 y v_2) \ \wedge \ \xi \to (x, y) \in P \ \wedge h_N(u_1) = h_N(v_1),
\end{aligned}$$

kde $h_N \colon (N \cup T_1 \cup T_2)^* \to N^*$ je homomorfizmus daný ako $h(\xi) = \xi$ pre $\xi \in N$ a $h(c) = \varepsilon$ pre $c \in T_1 \cup T_2$. Ak je prekladová schéma $\mathcal{S}$ zrejmá z kontextu, píšeme niekedy namiesto $\Rightarrow_{\mathcal{S}}$ iba $\Rightarrow$.

Poznámka 2. Podmienka $h_N(u_1) = h_N(v_1)$ v predchádzajúcej definícii zaručuje, že sa v oboch generovaných vetných formách prepíše rovnaký výskyt neterminálu ξ.

Definícia 6. Nech $\mathcal{S} = (N, T_1, T_2, P, \sigma)$ je jednoduchá prekladová schéma. *Preklad realizovaný prekladovou schémou* $\mathcal{S}$ je relácia $\Pi(\mathcal{S}) \subseteq T_1^* \times T_2^*$ daná ako

$$\Pi(\mathcal{S}) = \{(u, v) \in T_1^* \times T_2^* \mid (\sigma, \sigma) \Rightarrow_{\mathcal{S}}^* (u, v)\}.$$

Analógiou lemy 1 je pre jednoduché prekladové schémy nasledujúci výsledok.

Lema 2. *Nech $\mathcal{S} = (N, T_1, T_2, P, \sigma)$ je jednoduchá prekladová schéma a $\Pi = \Pi(\mathcal{S})$. Potom sú obidva jazyky $\mathrm{pr}_1(\mathcal{S})$ a $\mathrm{pr}_2(\mathcal{S})$ bezkontextové.*

Dôkaz. Nech $G_1 = (N, T_1, P_1, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s množinou prepisovacích pravidiel P_1 danou ako $P_1 = \{\xi \to x \mid \exists y \in (N \cup T_2)^* : \xi \to (x, y) \in P\}$. Zrejme $L(G_1) = \mathrm{pr}_1(\mathcal{S})$. Podobne, pre bezkontextovú gramatiku $G_2 = (N, T_2, P_2, \sigma)$ s $P_2 = \{\xi \to y \mid \exists x \in (N \cup T_1)^* : \xi \to (x, y) \in P\}$ očividne platí $L(G_2) = \mathrm{pr}_2(\mathcal{S})$. □

Podobne ako pri a-prekladačoch, môžeme sa aj na jednoduché prekladové schémy dívať ako na operácie na jazykoch; má teda zmysel definovať obraz jazyka pri zobrazení jednoduchou prekladovou schémou.

Definícia 7. Nech $\mathcal{S} = (N, T_1, T_2, P, \sigma)$ je jednoduchá prekladová schéma a $L \subseteq T_1^*$ je jazyk. *Obraz jazyka L pri zobrazení prekladovou schémou $\mathcal{S}$* je jazyk

$$\mathcal{S}(L) = \{v \in T_2^* \mid \exists u \in L : (\sigma, \sigma) \Rightarrow^* (u, v)\}.$$

[1] Pre krok odvodenia $\Rightarrow_{\mathcal{S}}$ teda platí $\Rightarrow_{\mathcal{S}} \subseteq ((N \cup T_1)^* \times (N \cup T_2)^*) \times ((N \cup T_1)^* \times (N \cup T_2)^*)$.

Preklady a transformácie jazykov

Máme teda k dispozícii dve zariadenia na preklad jazykov: a-prekladače a jednoduché prekladové schémy. Pre obidve tieto zariadenia máme definovaný nimi realizovaný preklad, ako aj obraz jazyka pri zobrazení daným zariadením. Nasledujúce tvrdenia vyplývajú priamo z definícií uvedených vyššie; ich dôkazy preto prenechávame čitateľovi.

Tvrdenie 1. *Nech* $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ *je a-prekladač a* $L \subseteq \Sigma_1^*$. *Potom*

$$M(L) = \{v \in \Sigma_2^* \mid \exists u \in L : (u, v) \in \Pi(M)\}.$$

Tvrdenie 2. *Nech* $\mathcal{S} = (N, T_1, T_2, P, \sigma)$ *je jednoduchá prekladová schéma a* $L \subseteq T_1^*$. *Potom*

$$\mathcal{S}(L) = \{v \in T_2^* \mid \exists u \in L : (u, v) \in \Pi(\mathcal{S})\}.$$

Úloha 1. Nech $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a $L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

a) Existuje jednoduchá prekladová schéma $\mathcal{S}$ taká, že $\mathrm{pr}_1(\Pi(\mathcal{S})) = L_1$ a $\mathrm{pr}_2(\Pi(\mathcal{S})) = L_2$.

b) Existuje jednoduchá prekladová schéma $\mathcal{S}$ taká, že $\mathcal{S}(L_1) = L_2$.

Riešenie.

a) Takáto prekladová schéma neexistuje, pretože v opačnom prípade by podľa lemy 2 musel byť jazyk L_2 bezkontextový.

b) Zjavne stačí zostrojiť prekladovú schému $\mathcal{S} = (N, T_1, T_2, P, \sigma)$ takú, že

$$\Pi(\mathcal{S}) = \{(a^i b^j, a^i b^j c^j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}.$$

V takom prípade totiž priamo z tvrdenia 2 dostávame $\mathcal{S}(L_1) = L_2$.

Schému $\mathcal{S}$ zostrojíme nasledovne: $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T_1 = \{a, b\}$, $T_2 = \{a, b, c\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\sigma \to (\alpha\beta, \alpha\beta) \\ &\alpha \to (a\alpha, a\alpha), (\varepsilon, \varepsilon) \\ &\beta \to (b\beta, b\beta c), (\varepsilon, \varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Zrejme ide o korektnú prekladovú schému a $\Pi(\mathcal{S}) = \{(a^i b^j, a^i b^j c^j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$. □