

Poznámky k cvičeniu č. 11

Peter Kostolányi

30. novembra 2016

Ekvivalencia deterministických a nedeterministických Turingových strojov

Podobne ako sa každý deterministický konečný automat zvykne intuitívne považovať súčasne aj za nedeterministický konečný automat, možno aj každý deterministický Turingov stroj intuitívne chápať ako špeciálny nedeterministický Turingov stroj. Táto predstava síce v ani jednom prípade nie je formálne správna, no celý problém tkvie v skutočnosti, že kým výstupom prechodovej funkcie je v deterministickom variante nejaký objekt, v nedeterministickom variante je to množina takýchto objektov.

Korektná formalizácia korešpondencie medzi deterministickým a jemu zodpovedajúcim nedeterministickým strojom je teda nasledovná. Nech $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ je deterministický Turingov stroj. Uvažujme teraz nedeterministický Turingov stroj $A' = (K, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, F)$, kde prechodová funkcia δ' je pre všetky $q \in K$ a $c \in \Gamma$ definovaná nasledovne: ak je hodnota $\delta(q, c)$ definovaná, tak $\delta'(q, c) = \{\delta(q, c)\}$. V opačnom prípade $\delta'(q, c) = \emptyset$. Je zrejmé, že $L(A') = L(A)$. Ku každému deterministickému Turingovmu stroju teda existuje ekvivalentný nedeterministický Turingov stroj (ktorý sa niekedy s pôvodným deterministickým strojom intuitívne stotožňuje).

Na dôkaz ekvivalencie deterministických a nedeterministických Turingových strojov teda stačí ukázať, že výpočet nedeterministického stroja možno odsimulovať aj na stroji deterministickom. To možno urobiť napríklad prehládávaním stromu konfigurácii nedeterministického Turingovho stroja do šírky. Prehládávanie do hĺbky použiť nemožno, keďže takýto strom konfigurácii je vo všeobecnosti nekonečný (vždy však má konečné vetvenie).

Nech teda $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ je nedeterministický Turingov stroj. Princíp deterministického Turingovho stroja $A' = (K', \Sigma', \Gamma', \delta', q'_0, F')$ simulujúceho stroj A možno neformálne a v hrubých rysoch opísať nasledovne:

1. Ak A' dostane na vstupe slovo w , upraví obsah pásky na počiatočnú konfiguráciu stroja A na vstupe w . Zapísaná časť pásky teda bude mať obsah $\bar{B}q_0w\bar{B}$, kde \bar{B} je „falošný blank“. V nasledujúcom budeme obsah pásky interpretovať ako FIFO front konfigurácií stroja A , oddelených špeciálnym symbolom $\#$. Symboly \bar{B} pritom budeme interpretovať ako symboly \mathbf{B} susediace so zapísanou časťou pásky (ktoré sú podľa definície súčasťou konfigurácie). Na začiatku simulácie je teda obsahom frontu jediná konfigurácia $\mathbf{B}q_0w\mathbf{B}$.
2. Opakuj v nekonečnom cykle:
 - 2.1 Ak je front prázdny, ukonči cyklus a vstup w zamietni.
 - 2.2 V opačnom prípade, nech C je prvá konfigurácia vo fronte.
 - 2.3 Ak je konfigurácia C akceptačná (obsahuje akceptačný stav), ukonči cyklus a vstup w akceptuj.
 - 2.4 Ak konfigurácia C akceptačná nie je, pridaj na koniec frontu všetky konfigurácie C' také, že $C \vdash_A C'$. Takýchto konfigurácií je vždy konečne veľa (ak je v konfigurácii C stroj v stave q a hlava číta písmeno c , ich počet je $|\delta(q, c)|$). Zmaž konfiguráciu C zo začiatku frontu.

Z hľadiska implementácie na deterministickom Turingovom stroji je najmenej triviálnym krokom uvedeného algoritmu bod 2.4. Stroj môže pracovať napríklad tak, že si najprv v stave zapamätá všetky trojice z množiny $\delta(q, c)$, následne $|\delta(q, c)|$ -krát skopíruje konfiguráciu C na koniec frontu (pričom jednotlivé kópie pooddeľuje symbolom $\#$) a napokon využije informácie zapamätané v stave na úpravu všetkých týchto kópií podľa trojíc z $\delta(q, c)$.