Poznámky k cvičeniu č. 6

Peter Kostolányi

26. októbra 2016

Determinizácia konečných automatov

Je jedným z kľúčových výsledkov teórie konečných automatov, že deterministické a nedeterministické konečné automaty majú rovnakú výpočtovú silu. Jedným smerom je toto tvrdenie zrejmé: aj keď deterministický konečný automat formálne nie je nedeterministický konečný automat, po drobnej úprave prechodovej funkcie sa ním stane. Zvyšná časť tvrdenia bola dokázaná na prednáške a možno ju sformulovať v podobe nasledujúcej vety.

Veta 1. *Nech* $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *je nedeterministický konečný automat. Potom existuje* deterministický *konečný automat* $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$ *taký, že* $L(A') = L(A)$.

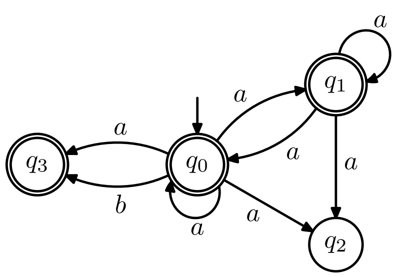
Algoritmus determinizácie nedeterministického konečného automatu predpokladá ako svoj vstup už „odepsilonovaný" NKA $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a spočíva v tzv. podmnožinovej konštrukcii:

1. Nech $K' = 2^K$.
2. Pre každé $Q \in K'$ a každé $c \in \Sigma$ polož $\delta'(Q, c) = \{p \in K \mid \exists q \in Q : p \in \delta(q, c)\}$.
3. Za počiatočný stav q_0' vezmi množinu $\{q_0\}$.
4. Za množinu akceptačných stavov F' vezmi množinu stavov $Q \in K'$ (každé takéto Q je teda množina stavov z K) takých, že existuje aspoň jedno $q \in Q \cap F$.

Výstupom takejto konštrukcie je deterministický konečný automat $A' = (K', \Sigma, \delta', q_0', F')$.

Poznámka 1. Niektoré stavy automatu A' vyrobeného horeuvedeným postupom môžu byť nedosiahnuteľné. „Opatrnejšou" konštrukciou, v ktorej sa postupne vytvárajú iba dosiahnuteľné stavy, tak možno získať menší deterministický automat.

Úloha 1. Uvažujme nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ na obrázku 1.



Obr. 1: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A.

Štandardnou konštrukciou zostrojte ekvivalentný *deterministický* konečný automat.

Riešenie. Automat A neobsahuje žiadne prechody na ε. Preto stačí priamo aplikovať podmnožinovú konštrukciu, čím dostávame deterministický konečný automat $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$, kde $K' = 2^K$, $\Sigma' = \Sigma$, $q_0' = \{q_0\}$,

$$F' = \{\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_3\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_3\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, \{q_0, q_1, q_2\},$$
$$\{q_0, q_1, q_3\}, \{q_0, q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}\}$$

a

$$
\begin{aligned}
\delta'(\emptyset, a) &= \emptyset, & \delta'(\emptyset, b) &= \emptyset,\\
\delta'(\{q_0\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, & \delta'(\{q_0\}, b) &= \{q_3\},\\
\delta'(\{q_1\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_1\}, b) &= \emptyset,\\
\delta'(\{q_2\}, a) &= \emptyset, & \delta'(\{q_2\}, b) &= \emptyset,\\
\delta'(\{q_3\}, a) &= \emptyset, & \delta'(\{q_3\}, b) &= \emptyset,\\
\delta'(\{q_0, q_1\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, & \delta'(\{q_0, q_1\}, b) &= \{q_3\},\\
\delta'(\{q_0, q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, & \delta'(\{q_0, q_2\}, b) &= \{q_3\},\\
\delta'(\{q_0, q_3\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, & \delta'(\{q_0, q_3\}, b) &= \{q_3\},\\
\delta'(\{q_1, q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_1, q_2\}, b) &= \emptyset,\\
\delta'(\{q_1, q_3\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_1, q_3\}, b) &= \emptyset,\\
\delta'(\{q_2, q_3\}, a) &= \emptyset, & \delta'(\{q_2, q_3\}, b) &= \emptyset,\\
\delta'(\{q_0, q_1, q_2\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, & \delta'(\{q_0, q_1, q_2\}, b) &= \{q_3\},\\
\delta'(\{q_0, q_1, q_3\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, & \delta'(\{q_0, q_1, q_3\}, b) &= \{q_3\},\\
\delta'(\{q_0, q_1, q_3\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, & \delta'(\{q_0, q_2, q_3\}, b) &= \{q_3\},\\
\delta'(\{q_1, q_2, q_3\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2\}, & \delta'(\{q_1, q_2, q_3\}, b) &= \emptyset,\\
\delta'(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, a) &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, & \delta'(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, b) &= \{q_3\}. \quad \square
\end{aligned}
$$

Cvičenie 1. Nájdite množinu stavov, ktoré sú dosiahnuteľné v automate A'.

Konštrukcia regulárnej gramatiky ku konečnému automatu

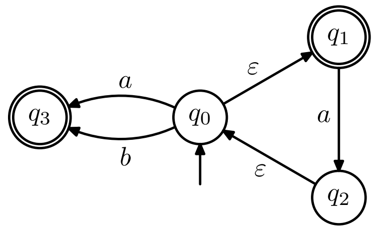
Na prednáške bola dokázaná ekvivalencia (deterministických alebo nedeterministických) konečných automatov a regulárnych gramatík. Jednou z častí tohto dôkazu je konštrukcia regulárnej gramatiky ekvivalentnej danému konečnému automatu.

Veta 2. *Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je nedeterministický konečný automat. Potom existuje regulárna gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ taká, že $L(G) = L(A)$.*

Postup konštrukcie gramatiky $G = (N, T, P, \sigma)$ k danému nedeterministickému konečnému automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ možno zhrnúť v nasledujúcich bodoch:

1. Abeceda neterminálov gramatiky G je množina stavov automatu A: $N = K$.
2. Abeceda terminálov gramatiky G je identická so vstupnou abecedou automatu A: $T = \Sigma$.
3. Množina prepisovacích pravidiel P gramatiky G je daná nasledovne:
   a) Pre každé $p, q \in K$ a $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ také, že $q \in \delta(p, z)$, je v množine prepisovacích pravidiel P pravidlo $p \to zq$.
   b) Pre každé $q \in F$ je v množine prepisovacích pravidiel P pravidlo $q \to \varepsilon$.
   c) Množina P neobsahuje žiadne iné prepisovacie pravidlá.
4. Počiatočný neterminál gramatiky G je počiatočný stav automatu A: $\sigma = q_0$.

Úloha 2. Uvažujme nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s $K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_1, q_3\}$ a prechodovou funkciou δ danou prechodovým diagramom na obrázku 2. Štandardnou konštrukciou zostrojte regulárnu gramatiku G ekvivalentnú automatu A.



Obr. 2: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A.

Riešenie. V súlade s horeuvedeným postupom definujme gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ nasledovne: $N = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $\sigma = q_0$ a

$$\begin{aligned} P = \{ q_0 &\to q_1 \mid aq_3 \mid bq_3 \\ q_1 &\to aq_2 \mid \varepsilon \\ q_2 &\to q_0 \\ q_3 &\to \varepsilon \}. \end{aligned}$$

Gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ je ekvivalentná automatu A. □

Konštrukcia konečného automatu k regulárnej gramatike

Ekvivalencia konečných automatov a regulárnych gramatík vyplýva z vety 2 a nasledujúcej vety:

Veta 3. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je regulárna gramatika. Potom existuje nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A) = L(G)$.*

Konštrukciu konečného automatu $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ekvivalentného danej regulárnej gramatike $G = (N, T, P, \sigma)$ možno zhrnúť v nasledujúcich bodoch:

1. Zostroj regulárnu gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$ takú, že $P' \subseteq N' \times (TN' \cup N' \cup T \cup \{\varepsilon\})$ a $L(G') = L(G)$. Gramatika G' je teda v normálnom tvare s najviac jedným terminálom na pravej strane každého pravidla a jej konštrukcia je podobná ako pri prevode bezkontextovej gramatiky do Chomského normálneho tvaru. Podrobnosti tejto konštrukcie prenechávame čitateľovi.

2. Množina stavov automatu A je abeceda neterminálov gramatiky G' s jedným novým stavom q_{fin}. Platí teda $K = N' \cup \{q_{fin}\}$, $q_{fin} \notin N'$.

3. Vstupná abeceda automatu A je abeceda terminálov gramatík G a G': $\Sigma = T$.

4. Prechodová funkcia δ automatu A je pre každé $\xi \in N'$ a $z \in T \cup \{\varepsilon\}$ daná nasledovne:

   a) Ak pre nejaké $\eta \in N'$ platí $\xi \to z\eta \in P'$, tak $\eta \in \delta(\xi, z)$.
   b) Ak $\xi \to z \in P'$, tak $q_{fin} \in \delta(\xi, z)$.
   c) Množina $\delta(\xi, z)$ neobsahuje žiadne iné stavy.

5. Počiatočný stav automatu A je počiatočný neterminál gramatík G a G': $q_0 = \sigma$.

6. Jediný akceptačný stav automatu A je q_{fin}: $F = \{q_{fin}\}$.

Úloha 3. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je regulárna gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{ \sigma &\to ab\sigma \mid b\beta \mid b \mid \varepsilon \\ \alpha &\to a\alpha \mid \varepsilon \\ \beta &\to \sigma \mid aa\gamma \\ \gamma &\to bb \mid \varepsilon \}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou zostrojte ekvivalentný nedeterministický konečný automat.

Riešenie. Zaveďme nasledujúce označenia pravidiel gramatiky G:

$$\begin{aligned}
&\sigma \to ab\sigma \text{ označme ako } \pi_1,\\
&\beta \to aa\gamma \text{ označme ako } \pi_2,\\
&\gamma \to bb \text{ označme ako } \pi_3.
\end{aligned}$$

Regulárnu gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$ z bodu 1 horeuvedeného postupu možno zostrojiť nasledovne: $N' = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_2,1}, \psi_{\pi_3,1}\}$ a

$$\begin{aligned}
P = \{\sigma &\to a\psi_{\pi_1,1} \mid b\beta \mid b \mid \varepsilon\\
\alpha &\to a\alpha \mid \varepsilon\\
\beta &\to \sigma \mid a\psi_{\pi_2,1}\\
\gamma &\to b\psi_{\pi_3,1} \mid \varepsilon\\
\psi_{\pi_1,1} &\to b\sigma\\
\psi_{\pi_2,1} &\to a\gamma\\
\psi_{\pi_3,1} &\to b\}.
\end{aligned}$$

Výsledný nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je potom daný bodmi 2 až 6: $K = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_2,1}, \psi_{\pi_3,1}, q_{fin}\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $q_0 = \sigma$, $F = \{q_{fin}\}$ a

$$\begin{array}{lll}
\delta(\sigma, a) = \{\psi_{\pi_1,1}\}, & \delta(\sigma, b) = \{\beta, q_{fin}\}, & \delta(\sigma, \varepsilon) = \{q_{fin}\},\\
\delta(\alpha, a) = \{\alpha\}, & \delta(\alpha, b) = \emptyset, & \delta(\alpha, \varepsilon) = \{q_{fin}\},\\
\delta(\beta, a) = \{\psi_{\pi_2,1}\}, & \delta(\beta, b) = \emptyset, & \delta(\beta, \varepsilon) = \{\sigma\},\\
\delta(\gamma, a) = \emptyset, & \delta(\gamma, b) = \{\psi_{\pi_3,1}\}, & \delta(\gamma, \varepsilon) = \{q_{fin}\},\\
\delta(\psi_{\pi_1,1}, a) = \emptyset, & \delta(\psi_{\pi_1,1}, b) = \{\sigma\}, & \delta(\psi_{\pi_1,1}, \varepsilon) = \emptyset,\\
\delta(\psi_{\pi_2,1}, a) = \{\gamma\}, & \delta(\psi_{\pi_2,1}, b) = \emptyset, & \delta(\psi_{\pi_2,1}, \varepsilon) = \emptyset,\\
\delta(\psi_{\pi_3,1}, a) = \emptyset, & \delta(\psi_{\pi_3,1}, b) = \{q_{fin}\}, & \delta(\psi_{\pi_3,1}, \varepsilon) = \emptyset.
\end{array}$$

Automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je ekvivalentný gramatike G. □