Poznámky k cvičeniu č. 4

Peter Kostolányi

18. októbra 2017

Formálna definícia pojmu odvodenia

Odvodenie v bezkontextovej gramatike je pomerne intuitívny pojem, ktorého poriadnej definícii sa v literatúre nevenuje príliš veľká pozornosť. Zvyčajne sa narába iba s neformálnou predstavou o „odvodení $\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$“, pričom sa toleruje, že takýto zápis v skutočnosti nereprezentuje žiaden matematický objekt. V niektorých zdrojoch možno nájsť pokus o zmiernenie tejto nepresnosti podaním formálnej definície pojmu odvodenia, ktorá má zápisom ako ten vyššie priradiť určitý význam. Tieto definície sú však často chybné a nesúhlasia napríklad s teóriou okolo stromov odvodenia, kde je čitateľ znova prenechaný napospas intuícii.

Hovoriť o „odvodení $\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$“ je účelné z hľadiska prehľadnosti a intuitívnosti zápisu a budeme tak robiť aj my. Na správne pochopenie konceptu stromov odvodenia je však nutné mať adekvátnu predstavu o tom, čo sa takýmto zápisom v skutočnosti myslí. Inými slovami: je nutná formálna definícia pojmu odvodenia, ktorá bude „v pozadí“ za každým zápisom typu $\sigma \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$ a ktorá zároveň bude v súlade s neskoršie zavedenými pojmami.

Začnime najprv s nepresnou definíciou Seymoura Ginsburga [1]. Ten definuje odvodenie ako postupnosť slov $w_0, w_1, \ldots, w_n$ takých, že platí $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$. Uvažujme ale napríklad odvodenie vetnej formy $\alpha\alpha\alpha$ v bezkontextovej gramatike $G = (N, T, P, \sigma)$ s $N = \{\sigma, \alpha\}$, $T = \{a\}$ a $P = \{\sigma \to \alpha\alpha,\ \alpha \to \alpha\alpha \mid a\}$. Podľa Ginsburgovej definície zjavne existuje jediné takéto odvodenie

$$\sigma \Rightarrow \alpha\alpha \Rightarrow \alpha\alpha\alpha,$$

čo zodpovedá postupnosti slov $\sigma, \alpha\alpha, \alpha\alpha\alpha$. Zaveďme však teraz do obvyklého zápisu odvodení nový prvok: v každej vetnej forme podčiarknime ten výskyt neterminálu, ktorý sa v nasledujúcom kroku odvodenia prepíše. Ľahko vidieť, že takýmto spôsobom vieme pre slovo $\alpha\alpha\alpha$ nájsť dve odvodenia, ktoré intuitívne nie sú ekvivalentné:

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\alpha}\alpha \Rightarrow \alpha\alpha\alpha,$$
$$\underline{\sigma} \Rightarrow \alpha\underline{\alpha} \Rightarrow \alpha\alpha\alpha.$$

Tieto dve odvodenia nie sú ekvivalentné nielen intuitívne, ale ani podľa neskoršej Ginsburgovej definície stromu odvodenia. Z toho vyplýva, že definícia odvodenia ako postupnosti slov v relácii kroku odvodenia nie je postačujúca.

Poznámka 1. Problém s odvodením vetnej formy $\alpha\alpha\alpha$ v gramatike G by nevyriešila ani definícia odvodenia ako striedavej postupnosti slov a prepisovacích pravidiel. Tá je totiž pri obidvoch neekvivalentných odvodeniach rovnaká.

Vhodnou nápravou Ginsburgovej definície sa javí byť práve zahrnutie „podčiarknutých neterminálov“ použitých vyššie. Zo zápisu $u\underline{\alpha}v \Rightarrow uxv$ je totiž zrejmý výskyt prepisovaného neterminálu a aj použité prepisovacie pravidlo je ním určené jednoznačne (prečo?).

Nasledujúcu definíciu uvádzame iba pre úplnosť a s cieľom presvedčiť nedôverčivého čitateľa o možnosti poriadne sformalizovať pojem odvodenia.

Definícia 1. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Nech $\underline{N} = \{\underline{\alpha} \mid \alpha \in N\}$ je abeceda „podčiarknutých neterminálov“, o ktorej predpokladáme, že je disjunktná s $N \cup T$. Nech $h\colon (N \cup \underline{N} \cup T)^* \to (N \cup T)^*$, definovaný ako $h(\underline{\alpha}) = \alpha$ a $h(\alpha) = \alpha$ pre $\alpha \in N$ a ako $h(c) = c$ pre $c \in T$, je „homomorfizmus vymazávajúci podčiarknutia“. *Odvodenie* v gramatike G je postupnosť slov $w_0, w_1, \ldots, w_n$ taká, že:

(*i*) Pre $i = 0, \ldots, n-1$ je $w_i = u_i\underline{\alpha_i}v_i$, kde $u_i, v_i \in (N \cup T)^*$ a $\alpha_i \in N$; $w_n \in (N \cup T)^*$.

(*ii*) Pre $i = 0, \ldots, n-1$ platí $h(w_{i+1}) = u_i x_i v_i$ pre nejaké $x_i \in (N \cup T)^*$ také, že $\alpha_i \to x_i \in P$.

Odvodenie slova w v gramatike G je odvodenie $w_0, w_1, \ldots, w_n$ také, že $w_0 = \underline{\sigma}$ a $w_n = w$.

Stromy odvodenia, jednoznačnosť a viacznačnosť

Nie je však pravdou, že všetky formálne rôzne odvodenia sú aj intuitívne neekvivalentné. Uvažujme napríklad gramatiku G z predchádzajúceho oddielu. Slovo aa sa v nej dá odvodiť dvoma spôsobmi:

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\alpha}\alpha \Rightarrow a\underline{\alpha} \Rightarrow aa,$$
$$\underline{\sigma} \Rightarrow \alpha\underline{\alpha} \Rightarrow \underline{\alpha}a \Rightarrow aa.$$

Tieto odvodenia sa líšia iba poradím prepísania jednotlivých výskytov neterminálu α, pričom „štruktúra“ odvodenia je v oboch prípadoch rovnaká. Podobná situácia nastane vždy, keď sa v odvodení vyskytne vetná forma s viac ako jedným neskôr prepísaným neterminálom – poradie ich prepisovania možno zvoliť ľubovoľne, čo znamená viacero formálne rôznych odvodení.

Aj z tohto dôvodu je často namieste považovať odvodenia s rovnakou „štruktúrou“, líšiace sa iba poradím prepisovania neterminálov, za ekvivalentné. Formalizáciou tejto myšlienky je koncept *stromu odvodenia*, čo je stromová štruktúra jedinečná pre každé odvodenie.[1] Stromu odvodenia môže naopak zodpovedať aj viacero odvodení, ktoré sa však líšia iba poradím prepisovania neterminálov a považujú sa za „ekvivalentné“.

Prv než uvedieme jeho formálnu definíciu, ilustrujeme pojem stromu odvodenia na príklade.

Príklad 1. Uvažujme gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ s $N = \{\sigma\}$, $T = \{a, b\}$ a $P = \{\sigma \to \sigma\sigma \mid a \mid b \mid \varepsilon\}$ a odvodenia

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma\sigma \Rightarrow a\underline{\sigma}\sigma \Rightarrow ab\underline{\sigma} \Rightarrow aba$$
$$\underline{\sigma} \Rightarrow \sigma\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma\sigma \Rightarrow \underline{\sigma}\sigma\sigma\sigma \Rightarrow a\underline{\sigma}\sigma\sigma \Rightarrow a\underline{\sigma}\sigma \Rightarrow ab\underline{\sigma} \Rightarrow aba.$$

Zodpovedajúce stromy odvodenia sú na obrázku 1.

(a) Strom prvého odvodenia. **(b)** Strom druhého odvodenia.

Obr. 1: Stromy odvodení v gramatike G.

Stromy odvodenia zodpovedajúce daným dvom odvodeniam slova aba sú rôzne, čo znamená, že tieto dve odvodenia nepovažujeme za „ekvivalentné“. Naopak, napríklad odvodenie

$$\underline{\sigma} \Rightarrow \sigma\underline{\sigma} \Rightarrow \underline{\sigma}a \Rightarrow \sigma\underline{\sigma}a \Rightarrow \underline{\sigma}ba \Rightarrow aba$$

má rovnaký strom odvodenia ako prvé odvodenie. Tieto dve odvodenia teda možno považovať za v určitom zmysle ekvivalentné.

Formálna definícia stromu odvodenia zvyčajne pozostáva z dvoch častí. V prvej sa definujú všetky korektné stromy odvodení v danej gramatike. V druhej časti sa potom definuje, kedy strom odvodenia zodpovedá nejakému odvodeniu. V nasledujúcom pod *stromom* rozumieme zakorenený strom s ohodnotenými uzlami a s pevným usporiadaním potomkov.

Definícia 2. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. *Strom odvodenia* v gramatike G je strom, pre ktorý sú splnené nasledujúce podmienky:

(i) Každý vnútorný uzol je ohodnotený nejakým neterminálom $\xi \in N$.

[1]Pre Ginsburgovu menej presnú definíciu odvodenia táto vlastnosť (nechtiac) neplatí.

(*ii*) Každý list je ohodnotený buď nejakým symbolom $d \in N \cup T$, alebo prázdnym slovom ε. Listy ohodnotené prázdnym slovom nemajú súrodencov.

(*iii*) Ak má uzol ohodnotený neterminálom $\xi \in N$ synov ohodnotených $d_1, \ldots, d_n \in N \cup T \cup \{\varepsilon\}$ (v tomto poradí), tak P obsahuje pravidlo $\xi \to d_1 \ldots d_n$.

Zreťazenie ohodnotení všetkých listov (v poradí zľava doprava) určuje vetnú formu vygenerovanú daným odvodením z neterminálu, ktorým je ohodnotený koreň.

Definícia 3. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika a $\xi \Rightarrow^n w$ je odvodenie v G,[2] kde $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in N$ a $w \in (N \cup T)^*$. *Strom odvodenia* $\xi \Rightarrow^n w$ je strom odvodenia v gramatike G so zreťazením ohodnotení listov (v poradí zľava doprava) rovným w, definovaný induktívne vzhľadom na n:

1. Pre $n = 0$ nutne platí $w = \xi$; strom odvodenia $\xi \Rightarrow^0 \xi$ je potom strom pozostávajúci z jediného uzla ohodnoteného ξ.
2. Strom odvodenia $\xi \Rightarrow^n u\underline{\alpha}v \Rightarrow uxv = w$ vznikne zo stromu odvodenia $\xi \Rightarrow^n u\alpha v$ pridaním synov jeho $(|u|+1)$-ému „neepsilonovému“ listu tak, aby zreťazenie ich ohodnotení bolo x.

Poznámka 2. Uvedená definícia nie je úplne poriadna, čo nie je iba záležitosťou používania prirodzeného jazyka namiesto formalizmov, ale aj skutočnosti, že jej implicitnou súčasťou je nedokázané tvrdenie: „každý strom zostrojený podľa uvedenej induktívnej definície je strom odvodenia a zreťazenie ohodnotení jeho listov (v poradí zľava doprava) je rovné výslednej vetnej forme daného odvodenia.“ Formálny dôkaz tohto tvrdenia, bez ktorého by definícia 3 nedávala zmysel, prenechávame čitateľovi.

Je ľahké dokázať, že ľubovoľný podstrom stromu odvodenia je sám tiež stromom odvodenia.

Ľavé krajné odvodenie je také odvodenie $w_0, w_1, \ldots, w_n$ (v zmysle definície 1), kde je vo všetkých vetných formách $w_0, \ldots, w_{n-1}$ podčiarknutý prvý výskyt neterminálu (zľava) a *pravé krajné odvodenie* je také odvodenie, kde sú podčiarknuté posledné výskyty neterminálov. Inými slovami: v ľavom krajnom odvodení sa v každom kroku odvodenia prepisuje prvý neterminál zľava a v pravom krajnom odvodení sa v každom kroku prepisuje prvý neterminál sprava. Krok ľavého krajného odvodenia sa niekedy zvykne označovať symbolom $\Rightarrow_{lm}$ a krok pravého krajného odvodenia symbolom $\Rightarrow_{rm}$.

Ľahko vidieť, že existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi stromami odvodenia a ľavými (resp. pravými) krajnými odvodeniami.

Definícia 4. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. *Gramatika G sa nazýva jednoznačná*, ak pre každé slovo $w \in L(G)$ existuje práve jedno ľavé krajné odvodenie v gramatike G. Gramatika, ktorá nie je jednoznačná, sa nazýva *viacznačná*.

Definícia 5. Nech $L \in \mathscr{L}_{CF}$ je bezkontextový jazyk. Jazyk L sa nazýva *jednoznačný*, ak existuje jednoznačná bezkontextová gramatika G taká, že $L(G) = L$. Jazyk, ktorý nie je jednoznačný, sa nazýva *vnútorne viacznačný*.

Čitateľ si už istotne uvedomil, že jednoznačnosť gramatiky je ekvivalentná s podmienkou existencie práve jedného *pravého krajného* odvodenia pre každé slovo $w \in L(G)$, čo je ďalej ekvivalentné tomu, že pre každé slovo $w \in L(G)$ existuje práve jeden strom jeho odvodenia (so σ v koreni).

Normálne tvary bezkontextových gramatík

Vetou o normálnom tvare bezkontextových gramatík možno nazvať v zásade ľubovoľné tvrdenie, podľa ktorého ku každej bezkontextovej gramatike G existuje ekvivalentná – alebo v niektorých prípadoch „takmer ekvivalentná“ – gramatika G' spĺňajúca nejakú netriviálnu podmienku. Definíciu bezkontextovej gramatiky teda možno zúžiť tak, že sila modelu ostane nezmenená.[3]

[2] Treba mať na pamäti, že pod nepresným zápisom $\xi \Rightarrow^n w$ chápeme odvodenie v zmysle definície 1.

[3] Podobné tvrdenia možno samozrejme študovať aj pre iné objekty, ako sú bezkontextové gramatiky. Jedinou podmienkou je, aby na danej triede objektov bola netriviálnym spôsobom definovaná ekvivalencia (ktorú v prípade bezkontextových gramatík možno definovať ako $G \sim G' \iff L(G) = L(G')$).

Význam normálnych tvarov spočíva predovšetkým v dvoch rozdielnych, často ale úzko súvisiacich druhoch aplikácií:

- Normálne tvary nezriedka uľahčujú dôkazy tvrdení o bezkontextových jazykoch. Namiesto všeobecných bezkontextových gramatík totiž stačí uvažovať iba gramatiky v normálnom tvare, čo môže podstatne zjednodušiť argumentáciu. Dôležitá je pritom predovšetkým skutočnosť, že ekvivalentná gramatika v normálnom tvare *existuje*; algoritmus na prevod do normálneho tvaru je tu menej podstatný, avšak zaručuje konštruktívnosť dôkazu.
- Viaceré v praxi užitočné algoritmy pracujúce s bezkontextovými gramatikami[4] predpokladajú ako svoj vstup gramatiku v nejakom normálnom tvare. Pri implementácii takýchto algoritmov sa preto môže zísť aj procedúra na prevod do zodpovedajúceho normálneho tvaru.

V nasledujúcom sa zameriame výlučne na praktickú stránku prevodu gramatík do jednotlivých normálnych tvarov. Formálne matematické zápisy týchto konštrukcií a dôkazy ich správnosti boli prebraté na prednáške. Čitateľ by sa mal uistiť, že je schopný nasledujúce postupy náležite sformalizovať.

Redukovaný normálny tvar: definícia

Bezkontextová gramatika je *redukovaná* alebo *v redukovanom normálnom tvare*, ak neobsahuje žiadne pravidlo typu $\xi \to \xi$ a každý jej neterminál ξ je súčasne „terminujúci" (teda existuje aspoň jedno terminálne slovo odvoditeľné zo ξ) a dosiahnuteľný (v danej gramatike teda existuje vetná forma obsahujúca ξ – tá musí byť z definície odvoditeľná z počiatočného neterminálu).

Definícia 6. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Gramatika G je v *redukovanom normálnom tvare*, ak sú splnené nasledujúce tri podmienky:

(i) Množina pravidiel P neobsahuje pre žiadne $\xi \in N$ pravidlo $\xi \to \xi$.

(ii) Pre každé $\xi \in N$ existuje terminálne slovo $w \in T^*$ také, že $\xi \Rightarrow^* w$.

(iii) Pre každé $\xi \in N$ existujú slová $u, v \in (N \cup T)^*$ také, že $\sigma \Rightarrow^* u\xi v$.

Pomenovanie *normálny tvar* je odôvodnené vďaka nasledujúcej vete, ktorá bola sformulovaná a z veľkej časti aj dokázaná na prednáške.

Veta 1. *Nech G je bezkontextová gramatika taká, že $L(G) \neq \emptyset$. Potom existuje bezkontextová gramatika G' v redukovanom normálnom tvare taká, že $L(G') = L(G)$.*

Poznámka 3. Predpoklad $L(G) \neq \emptyset$ je v predchádzajúcej vete naozaj nutný. Každá bezkontextová gramatika totiž musí mať definovaný počiatočný neterminál σ. Ak je navyše gramatika G v redukovanom normálnom tvare, musí podľa podmienky (ii) definície 6 existovať terminálne slovo w také, že $\sigma \Rightarrow^* w$. Toto slovo ale nutne patrí do jazyka $L(G)$.

Na prednáške bolo dokázané, že každá z podmienok (i) až (iii) definície 6 sama o sebe určuje normálny tvar bezkontextových gramatík. V nasledujúcich oddieloch najprv zosumarizujeme algoritmy na prevod gramatík do týchto „pomocných" normálnych tvarov a následne ukážeme, že použitie všetkých troch týchto algoritmov vo vhodnom poradí garantuje ako výstup gramatiku v redukovanom normálnom tvare.

Odstránenie pravidiel typu $\xi \to \xi$

Na prednáške bola dokázaná nasledujúca lema, z ktorej vyplýva, že podmienka (i) definície 6 zodpovedá normálnemu tvaru bezkontextových gramatík.

Lema 1. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Potom existuje bezkontextová gramatika $G' = (N', T', P', \sigma')$ taká, že $L(G') = L(G)$ a množina P' neobsahuje pre žiadne $\xi \in N'$ pravidlo $\xi \to \xi$.*

[4] Príkladom môžu byť algoritmy, ktoré pre slovo x a gramatiku G rozhodujú, či $x \in L(G)$.

Algoritmus na prevod bezkontextovej gramatiky do normálneho tvaru daného lemou 1 spočíva jednoducho vo „vypustení“ všetkých pravidiel typu $\xi \to \xi$ z množiny prepisovacích pravidiel P, čo ilustruje nasledujúci príklad.

Príklad 2. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to a\alpha\beta \mid \beta\beta \mid \alpha \\ \alpha &\to \alpha b\alpha \mid \alpha \mid aa \\ \beta &\to b\beta\gamma \mid \beta\beta \\ \gamma &\to a\gamma \mid \sigma \mid \gamma \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Po odstránení pravidiel $\alpha \to \alpha$ a $\gamma \to \gamma$ dostávame ekvivalentnú gramatiku $G_1 = (N_1, T_1, P_1, \sigma_1)$, kde $N_1 = N$, $T_1 = T$, $\sigma_1 = \sigma$ a

$$\begin{aligned} P_1 = \{\sigma &\to a\alpha\beta \mid \beta\beta \mid \alpha \\ \alpha &\to \alpha b\alpha \mid aa \\ \beta &\to b\beta\gamma \mid \beta\beta \\ \gamma &\to a\gamma \mid \sigma \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Gramatika G_1 je v normálnom tvare z lemy 1.

Odstránenie „neterminujúcich“ neterminálov

Dôsledkom nasledujúcej lemy (dokázanej na prednáške) je, že podmienka (ii) definície 6 zodpovedá normálnemu tvaru bezkontextových gramatík – presnejšie bezkontextových gramatík generujúcich neprázdny jazyk. Z každej bezkontextovej gramatiky generujúcej neprázdny jazyk je teda možné odstrániť „neterminujúce“ neterminály.

Lema 2. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika taká, že $L(G) \neq \emptyset$. Potom existuje bezkontextová gramatika $G' = (N', T', P', \sigma')$ taká, že $L(G') = L(G)$ a pre každé $\xi \in N'$ existuje slovo $w \in (T')^*$ také, že $\xi \Rightarrow^*_{G'} w'$.*

Algoritmus na odstránenie „neterminujúcich“ neterminálov z bezkontextovej gramatiky spočíva v nájdení množiny „*terminujúcich*“ neterminálov S a v následnom odstránení zvyšných – čiže „neterminujúcich“ – neterminálov, ako aj všetkých pravidiel, v ktorých sa takéto neterminály vyskytujú. Množinu S možno formálne zapísať ako $S = \{\xi \in N \mid \exists w \in T^* \colon \xi \Rightarrow^* w\}$ a dá sa nájsť nasledujúcim algoritmom:

1. Nech $S_0 = \{\xi \in N \mid \exists u \in T^* \colon \xi \to u \in P\}$ je množina neterminálov „terminujúcich“ na jeden krok. Množina S_0 teda pozostáva z práve tých neterminálov ξ, pre ktoré existuje prepisovacie pravidlo s rýdzo terminálnou pravou stranou.

2. Iteruj $S_i = S_{i-1} \cup \{\xi \in N \mid \exists u \in (T \cup S_{i-1})^* \colon \xi \to u \in P\}$ pre $i = 1, 2, \ldots$, až kým pre nejaké k nenastane $S_k = S_{k-1}$. Množina S_i teda obsahuje všetky neterminály z množiny S_{i-1}, ako aj tie neterminály ξ, pre ktoré existuje prepisovacie pravidlo s pravou stranou obsahujúcou iba terminály a neterminály z S_{i-1}. V prípade, že pre nejaké k nastane situácia $S_k = S_{k-1}$, možno iteratívnu konštrukciu ukončiť.

3. $S = S_k$.

Poznámka 4. Uvedený algoritmus sa na každom vstupe zastaví, čo vyplýva zo skutočnosti, že v kroku 2 sa do množiny S_i v každej iterácii (okrem poslednej) pridá oproti množine S_{i-1} aspoň jeden neterminál a celkový počet neterminálov je konečný. Skutočnosť, že množina S_k je naozaj hľadaná množina „terminujúcich“ neterminálov, bola dokázaná na prednáške. Dôležité tu ale je, že S_k je *najmenšia* nadmnožina S_0, ktorá je iterovaným predpisom nezmenená.

Podobné iteratívne konštrukcie sú v matematike aj v informatike pomerne časté, ale ich analýza nemusí byť takto jednoduchá. Spoločným znakom je iterácia predpisu $x_i = F(x_{i-1})$ na prvkoch z nejakej usporiadanej množiny spĺňajúcej určité podmienky,[5] monotónnosť iterovaného zobrazenia F vzhľadom na dané usporiadanie a podmienka, aby hľadaný výsledok x bol *najmenším pevným bodom* zobrazenia F nad x_0, t.j. aby platilo $F(x) = x$ a aby x bol najmenší takýto prvok, pre ktorý $x_0 \preceq x$. Existencia pevných bodov a konvergencia iteratívneho postupu potom vyplýva z tzv. *viet o pevných bodoch*, z ktorých v tomto kontexte možno spomenúť predovšetkým *Tarského vetu o pevnom bode* a *Kleeneho vetu o pevnom bode*.

Cvičenie 1. Niektoré zápisy sa zvyknú používať iba kvôli prehľadnosti. Zistite, či v horeuvedenom algoritme možno v kroku 2 iterovať iba $S_i = \{\xi \in N \mid \exists u \in (T \cup S_{i-1})^* : \xi \to u \in P\}$.

Poznámka 5. Na prevod bezkontextovej gramatiky $G = (N, T, P, \sigma)$ do normálneho tvaru daného lemou 2 je potrebné najprv horeuvedeným postupom nájsť množinu „terminujúcich" neterminálov S a následne odstrániť všetky neterminály z $N - S$, ako aj všetky pravidlá z P, ktorých ľavá alebo pravá strana obsahuje neterminál z $N - S$. To ale možno urobiť iba pre bezkontextové gramatiky G generujúce neprázdny jazyk, keďže každá bezkontextová gramatika musí obsahovať minimálne počiatočný neterminál, kým v gramatike generujúcej prázdny jazyk nemôže byť počiatočný neterminál „terminujúci". Alternatívne možno uvažovať o algoritme, ktorého vstupom je *ľubovoľná* bezkontextová gramatika a ktorého výstupom je ekvivalentná gramatika v normálnom tvare z lemy 2 *alebo* informácia o tom, že gramatika G generuje prázdny jazyk. Práve takýto pohľad sa ukazuje byť mimoriadne užitočným.

Príklad 2 (pokračovanie). Nech $G_1 = (N_1, T_1, P_1, \sigma_1)$ je bezkontextová gramatika daná nasledovne: $N_1 = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T_1 = \{a, b\}$, $\sigma_1 = \sigma$ a

$$\begin{aligned} P_1 = \{\sigma &\to a\alpha\beta \mid \beta\beta \mid \alpha \\ \alpha &\to \alpha b\alpha \mid aa \\ \beta &\to b\beta\gamma \mid \beta\beta \\ \gamma &\to a\gamma \mid \sigma \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Zostrojíme najprv množinu „terminujúcich" neterminálov S:

1. $S_0 = \{\alpha, \gamma\}$,
2. $S_1 = S_0 \cup \{\sigma, \alpha, \gamma\} = \{\sigma, \alpha, \gamma\}$,
3. $S_2 = S_1 \cup \{\sigma, \alpha, \gamma\} = \{\sigma, \alpha, \gamma\} = S_1$.

Máme teda $S = S_2 = \{\sigma, \alpha, \gamma\}$. Po odstránení „neterminujúcich" neterminálov tak dostávame gramatiku $G_2 = (N_2, T_2, P_2, \sigma_2)$ s $N_2 = \{\sigma, \alpha, \gamma\}$, $T_2 = T_1$, $\sigma_2 = \sigma$ a

$$\begin{aligned} P_2 = \{\sigma &\to \alpha \\ \alpha &\to \alpha b\alpha \mid aa \\ \gamma &\to a\gamma \mid \sigma \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Gramatika G_2 je v normálnom tvare z lemy 2.

Odstránenie nedosiahnuteľných neterminálov

Aj podmienka (*iii*) definície 6 zodpovedá normálnemu tvaru bezkontextových gramatík, čo vyplýva z nasledujúcej lemy dokázanej na prednáške.

Lema 3. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Potom existuje bezkontextová gramatika $G' = (N', T', P', \sigma')$ taká, že $L(G') = L(G)$ a pre každé $\xi \in N'$ existujú slová $u, v \in (N' \cup T')^*$ také, že $\sigma' \Rightarrow^*_{G'} u\xi v$.*

[5]Väčšinou sa požaduje, aby išlo o tzv. *úplný zväz* alebo *úplné čiastočné usporiadanie (CPO)*.

Algoritmus na odstránenie nedosiahnuteľných neterminálov spočíva v nájdení množiny *dosiahnuteľných* neterminálov H a v následnom odstránení zvyšných – čiže nedosiahnuteľných – neterminálov a pravidiel obsahujúcich nedosiahnuteľné neterminály. Množinu H možno formálne zapísať ako $H = \{\xi \in N \mid \exists u, v \in (N \cup T)^* \colon \sigma \Rightarrow^* u\xi v\}$ a dá sa nájsť nasledujúcim algoritmom:

1. Nech $H_0 = \{\sigma\}$ – na nula krokov odvodenia je dosiahnuteľný jedine počiatočný neterminál.
2. Iteruj $H_i = H_{i-1} \cup \{\xi \in N \mid \exists \eta \in H_{i-1}\ \exists u, v \in (N \cup T)^* \colon \eta \to u\xi v \in P\}$ pre $i = 1, 2, \ldots$, až kým pre nejaké k nenastane $H_k = H_{k-1}$. Množina H_i teda obsahuje všetky neterminály z H_{i-1}, ako aj neterminály, ktoré sa vyskytujú na pravej strane niektorého pravidla, ktorého ľavá strana je neterminál z H_{i-1}. Ak pre niektoré k nastane situácia $H_k = H_{k-1}$, možno iteratívnu konštrukciu ukončiť.
3. $H = H_k$.

Cvičenie 2. Podobne ako v cvičení 1 zistite, či v horeuvedenom algoritme možno v kroku 2 iterovať iba $H_i = \{\xi \in N \mid \exists \eta \in H_{i-1}\ \exists u, v \in (N \cup T)^* \colon \eta \to u\xi v \in P\}$.

Príklad 2 (pokračovanie). Nech $G_2 = (N_2, T_2, P_2, \sigma_2)$ je bezkontextová gramatika daná nasledovne: $N_2 = \{\sigma, \alpha, \gamma\}$, $T_2 = \{a, b\}$, $\sigma_2 = \sigma$ a

$$\begin{aligned} P_2 = \{\sigma &\to \alpha \\ \alpha &\to \alpha b\alpha \mid aa \\ \gamma &\to a\gamma \mid \sigma \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Zostrojme množinu dosiahnuteľných neterminálov v gramatike G_2:

1. $H_0 = \{\sigma\}$,
2. $H_1 = H_0 \cup \{\alpha\} = \{\sigma, \alpha\}$,
3. $H_2 = H_1 \cup \{\alpha\} = \{\sigma, \alpha\} = H_1$.

Dostávame teda $H = H_2 = \{\sigma, \alpha\}$. Po odstránení nedosiahnuteľných neterminálov tak dostávame gramatiku $G' = (N', T', P', \sigma')$, kde $N' = \{\sigma, \alpha\}$, $T' = T_2$, $\sigma' = \sigma$ a

$$\begin{aligned} P' = \{\sigma &\to \alpha \\ \alpha &\to \alpha b\alpha \mid aa\}. \end{aligned}$$

Gramatika G' je v normálnom tvare z lemy 3.

Redukovaný normálny tvar: algoritmus

Ľubovoľnú bezkontextovú gramatiku možno previesť do redukovaného normálneho tvaru použitím nasledujúceho algoritmu:

1. Odstráň pravidlá typu $\xi \to \xi$.
2. Odstráň „neterminujúce" neterminály (a pravidlá, ktoré ich obsahujú).
3. Odstráň nedosiahnuteľné neterminály (a pravidlá, ktoré ich obsahujú).

Správnosť uvedeného algoritmu je založená na jednoduchom pozorovaní, že po aplikácii algoritmov na odstránenie „neterminujúcich" a nedosiahnuteľných neterminálov nemôže vzniknúť žiadne nové pravidlo typu $\xi \to \xi$ a že po aplikácii algoritmu na odstránenie nedosiahnuteľných neterminálov nemôže vzniknúť žiaden nový „neterminujúci" neterminál. Dôkaz týchto tvrdení je priamočiary a prenechávame ho čitateľovi.

Poznámka 6. Poradie odstraňovania „neterminujúcich“ a nedosiahnuteľných neterminálov vo všeobecnosti nemožno v algoritme prevodu do normálneho tvaru vymeniť. Uvažujme napríklad gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a\}$ a $P = \{\sigma \to \alpha \mid a,\ \alpha \to \alpha\beta,\ \beta \to a\}$.

Použitím horeuvedeného algoritmu možno ľahko overiť, že gramatika G je ekvivalentná redukovanej gramatike $G' = (N', T', P', \sigma')$, kde $N' = \{\sigma\}$, $T' = T$, $P' = \{\sigma \to a\}$ a $\sigma' = \sigma$.

Skúsme teraz aplikovať opačný postup a uvažujme najprv dosiahnuteľnosť neterminálov (gramatika G celkom očividne neobsahuje žiadne pravidlo typu $\xi \to \xi$ – zodpovedajúci krok teda možno vynechať). Dostávame $H_0 = \{\sigma\}$, $H_1 = \{\sigma, \alpha\}$ a $H_2 = \{\sigma, \alpha, \beta\} = H_3 = H$. Všetky neterminály sú teda dosiahnuteľné. Zamerajme sa teraz na „terminujúce“ neterminály. Dostávame $S_0 = \{\sigma, \beta\} = S_1 = S$. Vo výsledku teda máme gramatiku s $N' = \{\sigma, \beta\}$ a $P' = \{\sigma \to a,\ \beta \to a\}$, ktorá celkom očividne *nie je* v redukovanom normálnom tvare. Po odstránení „neterminujúcich“ neterminálov sa totiž môžu niektoré pôvodne dosiahnuteľné neterminály stať nedosiahnuteľnými.

Odstraňovanie pravidiel typu $\xi \to \xi$ naopak možno robiť aj uprostred alebo na konci celého algoritmu, ako by čitateľ istotne ľahko dokázal.

Príklad 2 (pokračovanie). V predchádzajúcich troch pokračovaniach príkladu 1 sme vlastne previedli bezkontextovú gramatiku G do redukovaného normálneho tvaru – ekvivalentnú redukovanú gramatiku sme pritom označili symbolom G'.

Úloha 1. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\sigma \to \alpha\alpha \mid \sigma \mid a\sigma \\ &\alpha \to \gamma \mid aa \mid \varepsilon \\ &\beta \to b\beta \mid b \\ &\gamma \to a\gamma \mid a\gamma\gamma\}. \end{aligned}$$

Preveďte gramatiku G do redukovaného normálneho tvaru.

Riešenie. Za účelom prehľadnosti zápisu nebudeme uvádzať úplné formálne zápisy pre gramatiky zostrojené v medzikrokoch nášho algoritmu – v takýchto prípadoch si vystačíme s množinou prepisovacích pravidiel.

Jediným pravidlom typu $\xi \to \xi$ je v gramatike G pravidlo $\sigma \to \sigma$. Po jeho odstránení dostávame gramatiku s prepisovacími pravidlami

$$\begin{aligned} &\sigma \to \alpha\alpha \mid a\sigma \\ &\alpha \to \gamma \mid aa \mid \varepsilon \\ &\beta \to b\beta \mid b \\ &\gamma \to a\gamma \mid a\gamma\gamma. \end{aligned}$$

Nájdeme teraz množinu „terminujúcich“ neterminálov S:

1. $S_0 = \{\alpha, \beta\}$,
2. $S_1 = S_0 \cup \{\sigma, \alpha, \beta\} = \{\sigma, \alpha, \beta\}$,
3. $S_2 = S_1 \cup \{\sigma, \alpha, \beta\} = \{\sigma, \alpha, \beta\} = S_1$.

Máme teda $S = S_2 = \{\sigma, \alpha, \beta\}$. Po odstránení „neterminujúcich“ neterminálov (v tomto prípade iba γ) dostávame gramatiku s prepisovacími pravidlami

$$\begin{aligned} &\sigma \to \alpha\alpha \mid a\sigma \\ &\alpha \to aa \mid \varepsilon \\ &\beta \to b\beta \mid b. \end{aligned}$$

Nakoniec nájdeme množinu dosiahnuteľných neterminálov H:

1. $H_0 = \{\sigma\}$,

2. $H_1 = H_0 \cup \{\sigma, \alpha\} = \{\sigma, \alpha\}$,
3. $H_2 = H_1 \cup \{\sigma, \alpha\} = \{\sigma, \alpha\} = H_1$.

Máme teda $H = H_2 = \{\sigma, \alpha\}$. Po odstránení nedosiahnuteľných neterminálov (v tomto prípade iba β) dostávame gramatiku $G' = (N', T', P', \sigma')$ s $N' = \{\sigma, \alpha\}$, $T' = \{a, b\}$, $\sigma' = \sigma$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to \alpha\alpha \mid a\sigma \\ \alpha &\to aa \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Gramatika G' je v redukovanom normálnom tvare. □

Chomského normálny tvar

Chomského normálny tvar umožňuje bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že sa v každom kroku odvodenia bezkontextovej gramatiky prepíše niektorý neterminál na dva neterminály, na jeden terminál, alebo na prázdne slovo. Takýto predpoklad alebo nejaký jeho silnejší variant sa často zíde pri dôkazoch, pretože stromy odvodenia bezkontextovej gramatiky v Chomského normálnom tvare sú v zásade binárne – až na listy obsahujúce terminál alebo prázdne slovo, ktoré nemajú súrodencov.

Definícia 7. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Gramatika G je v *Chomského normálnom tvare*, ak $P \subseteq N \times (N^2 \cup T \cup \{\varepsilon\})$.

Ako bolo dokázané na prednáške, platí:

Veta 2. *Nech G je bezkontextová gramatika. Potom existuje bezkontextová gramatika G' v Chomského normálnom tvare taká, že $L(G') = L(G)$.*

Vstupom nasledujúceho algoritmu na prevod do Chomského normálneho tvaru je ľubovoľná bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$.

1. Pre každý terminál $c \in T$ zaveď nový[6] neterminál ξ_c a pravidlo $\xi_c \to c$.
2. Nahraď vo všetkých pravidlách $\alpha \to x \in P$ (teda v tých pravidlách, *ktoré sa vyskytovali aj v pôvodnej gramatike* G) všetky terminály $c \in T$ neterminálom ξ_c. Nech $G_1 = (N_1, T, P_1, \sigma)$ je výsledná gramatika.

   Pre gramatiku G_1 platí, že pravá strana každého jej pravidla pozostáva z jedného terminálu, z prázdneho slova, alebo z neprázdneho slova zloženého iba z neterminálov. To v nasledujúcich krokoch zosilníme tak, aby v prípade neprázdneho slova zloženého z neterminálov bola jeho dĺžka rovná dvom.
3. Zaveď nový neterminál ξ_ε a pravidlo $\xi_\varepsilon \to \varepsilon$. Všetky pravidlá $\alpha \to \beta \in P_1$ – kde $\alpha, \beta \in N_1$ – nahraď pravidlom $\alpha \to \beta\xi_\varepsilon$. Nech $G_2 = (N_2, T, P_2, \sigma)$ je výsledná gramatika.

   Gramatika G_2 obsahuje iba prepisovacie pravidlá, ktoré majú na pravej strane jeden terminál, prázdne slovo, alebo slovo dĺžky aspoň dva, ktoré pozostáva iba z neterminálov. V záverečnom kroku teda stačí ošetriť „príliš dlhé“ slová na pravej strane.
4. Pre každé pravidlo $\alpha \to \beta_1\beta_2 \ldots \beta_k \in P_2$ (označme ho symbolom π) s $k > 2$ a $\beta_1, \ldots, \beta_k \in N_2$:

   4.1 Zaveď nové neterminály $\psi_{\pi,1}, \ldots, \psi_{\pi,k-2}$.

   4.2 Odober pôvodné pravidlo $\alpha \to \beta_1\beta_2 \ldots \beta_k$.

   4.3 Pridaj nové pravidlá $\alpha \to \beta_1\psi_{\pi,1}, \psi_{\pi,1} \to \beta_2\psi_{\pi,2}, \ldots, \psi_{\pi,k-2} \to \beta_{k-1}\beta_{k-2}$.

   Nech $G' = (N', T, P', \sigma)$ je výsledná gramatika. Tá je nutne v Chomského normálnom tvare.

[6]To znamená predpoklad, že práve zavedený neterminál nepatrí do N ani do T.

Poznámka 7. Uvedený algoritmus nie je optimálny: napríklad všetky pravidlá $\alpha \to c$, $c \in T$, pôvodnej gramatiky (ktoré Chomského normálny tvar neporušujú) sa nahradia trojicou pravidiel $\alpha \to \xi_c\xi_\varepsilon$, $\xi_c \to c$ a $\xi_\varepsilon \to \varepsilon$. Poznamenajme však, že toto neplatí pre pravidlá $\alpha \to \varepsilon$ pôvodnej gramatiky, ktoré sú vo výsledku nezmenené.

Úloha 2. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to a\alpha b\beta \mid \beta\beta \mid \alpha \\ \alpha &\to \alpha b\alpha \mid aa \\ \beta &\to b\beta\beta \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Preveďte gramatiku G do Chomského normálneho tvaru.

Riešenie. Pre všetky $c \in T$ zaveďme nový neterminál ξ_c a pravidlo $\xi_c \to c$ a aplikujme príslušnú transformáciu pravidiel, ktorých množina sa po transformácii zmení na

$$\begin{aligned} P_1 = \{\sigma &\to \xi_a\alpha\xi_b\beta \mid \beta\beta \mid \alpha \\ \alpha &\to \alpha\xi_b\alpha \mid \xi_a\xi_a \\ \beta &\to \xi_b\beta\beta \mid \varepsilon \\ \xi_a &\to a \\ \xi_b &\to b\}. \end{aligned}$$

Zaveďme ďalej nový neterminál ξ_ε a pravidlo $\xi_\varepsilon \to \varepsilon$ a vykonajme príslušnú transformáciu pravidiel, čím sa ich množina zmení na

$$\begin{aligned} P_2 = \{\sigma &\to \xi_a\alpha\xi_b\beta \mid \beta\beta \mid \alpha\xi_\varepsilon \\ \alpha &\to \alpha\xi_b\alpha \mid \xi_a\xi_a \\ \beta &\to \xi_b\beta\beta \mid \varepsilon \\ \xi_a &\to a \\ \xi_b &\to b \\ \xi_\varepsilon &\to \varepsilon\}. \end{aligned}$$

„Rozbime“ ešte príliš dlhé pravé strany pravidiel pomocou nových neterminálov. Za týmto účelom zaveďme označenia pravidiel

$$\begin{aligned} &\sigma \to \xi_a\alpha\xi_b\beta \text{ označme ako } \pi_1, \\ &\alpha \to \alpha\xi_b\alpha \text{ označme ako } \pi_2, \\ &\beta \to \xi_b\beta\beta \text{ označme ako } \pi_3. \end{aligned}$$

Po transformácii z bodu 4 horeuvedeného algoritmu potom dostávame bezkontextovú gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$ s $N' = \{\sigma, \alpha, \beta, \xi_a, \xi_b, \xi_\varepsilon, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_1,2}, \psi_{\pi_2,1}, \psi_{\pi_3,1}\}$ a

$$\begin{aligned} P' = \{\sigma &\to \xi_a\psi_{\pi_1,1} \mid \beta\beta \mid \alpha\xi_\varepsilon \\ \alpha &\to \alpha\psi_{\pi_2,1} \mid \xi_a\xi_a \\ \beta &\to \xi_b\psi_{\pi_3,1} \mid \varepsilon \\ \psi_{\pi_1,1} &\to \alpha\psi_{\pi_1,2} \\ \psi_{\pi_1,2} &\to \xi_b\beta \\ \psi_{\pi_2,1} &\to \xi_b\alpha \\ \psi_{\pi_3,1} &\to \beta\beta \\ \xi_a &\to a \\ \xi_b &\to b \\ \xi_\varepsilon &\to \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Konštrukcia je týmto dokončená. □

„Bezepsilonový“ normálny tvar

Bezkontextová gramatika je v „bezepsilonovom“ normálnom tvare, ak neobsahujúce vymazávajúce pravidlá typu $\xi \to \varepsilon$. V tomto prípade je pomenovanie „normálny tvar“ mierne zavádzajúce: gramatika bez takýchto pravidiel nikdy nemôže vygenerovať prázdne slovo ε, a teda nie každá bezkontextová gramatika sa dá do „bezepsilonového“ tvaru previesť. Ako však bolo dokázané na prednáške, ku každej bezkontextovej gramatike G existuje bezkontextová gramatika G' v „bezepsilonovom“ normálnom tvare, ktorá je s gramatikou G ekvivalentná „až na ε“, t.j. platí $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.

Definícia 8. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Hovoríme, že gramatika G je v „bezepsilonovom“ normálnom tvare, ak $P \subseteq N \times (N \cup T)^+$

Veta 3. *Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika. Potom existuje bezkontextová gramatika $G' = (N', T', P', \sigma')$ v „bezepsilonovom“ normálnom tvare taká, že $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.*

Správnosť nasledujúceho algoritmu na prevod gramatiky do „bezepsilonového“ normálneho tvaru bola dokázaná na prednáške. Vstupom je bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$.

1. Zostroj množinu $E = \{\xi \in N \mid \xi \Rightarrow^* \varepsilon\}$ vymazávajúcich neterminálov v gramatike G:
   1.1 Nech $E_0 = \{\xi \in N \mid \xi \to \varepsilon \in P\}$ je množina neterminálov vymazávajúcich na jeden krok.
   1.2 Iteruj $E_i = E_{i-1} \cup \{\xi \in N \mid \exists u \in E_{i-1}^* : \xi \to u \in P\}$ pre $i = 1, 2, \ldots$, až kým pre nejaké k nenastane $E_k = E_{k-1}$.
   1.3 $E = E_k$.
2. Pre každé pôvodné prepisovacie pravidlo $\xi \to u \in P$ také, že $\xi \in N$ a $u \in (N \cup T)^+$, pridaj do množiny prepisovacích pravidiel všetky pravidlá $\xi \to v_0 v_1 \ldots v_j$, $j \in \mathbb{N}$, $v_0, \ldots, v_j \in (N \cup T)^*$, také, že pre nejaké $\alpha_1, \ldots, \alpha_j \in E$ platí $u = v_0 \alpha_1 v_1 \alpha_2 \ldots v_{j-1} \alpha_j v_j$.
3. Odober z množiny prepisovacích pravidiel všetky pravidlá $\xi \to \varepsilon$, kde $\xi \in N$. Vráť výslednú gramatiku $G' = (N', T', P', \sigma')$ ako výstup.

V bode 2 by samozrejme bolo možné pridávať iba také pravidlá $\xi \to v_0 v_1 \ldots v_j$, pre ktoré $v_0 v_1 \ldots v_j \neq \varepsilon$. V opačnom prípade sa totiž pravidlo hneď v nasledujúcom kroku z gramatiky odstráni.

Úloha 3. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to a\sigma \mid b\alpha \mid bb \\ \alpha &\to \beta \mid aa \\ \beta &\to b\beta\beta \mid \varepsilon \\ \gamma &\to \alpha\alpha \mid a\gamma \mid a\}. \end{aligned}$$

Preveďte gramatiku G do „bezepsilonového“ normálneho tvaru.

Riešenie. Zostrojíme najprv množinu vymazávajúcich neterminálov E:

1. $E_0 = \{\beta\}$,
2. $E_1 = E_0 \cup \{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta\}$,
3. $E_2 = E_1 \cup \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,
4. $E_3 = E_2 \cup \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\} = E_2$.

Po úprave prepisovacích pravidiel potom dostávame gramatiku $G' = (N, T, P', \sigma)$ s

$$\begin{aligned} P' = \{\sigma &\to a\sigma \mid b\alpha \mid b \mid bb \\ \alpha &\to \beta \mid aa \\ \beta &\to b\beta\beta \mid b\beta \mid b \\ \gamma &\to \alpha\alpha \mid \alpha \mid a\gamma \mid a\}. \end{aligned}$$

Konštrukcia je hotová. □

Poznámka 8. Už sme spomenuli, že „bezepsilonový" normálny tvar nie je normálnym tvarom v pravom slova zmysle: „bezepsilonové" gramatiky totiž nedokážu vygenerovať prázdne slovo a veta o normálnom tvare tak zaručuje iba ekvivalenciu „až na ε". Tento drobný problém sa často zvykne riešiť alternatívnou definíciou „bezepsilonového" normálneho tvaru, v ktorom sa toleruje prepisovacie pravidlo $\sigma \to \varepsilon$ v prípade, že sa počiatočný neterminál σ nevyskytuje na pravej strane žiadneho pravidla. Inými slovami, množina prepisovacích pravidiel P musí byť v tvare $P \subseteq \{\sigma \to \varepsilon\} \cup N \times ((N - \{\sigma\}) \cup T)^+$. Na prevod do tohto variantu „bezepsilonového" normálneho tvaru stačí použiť horeuvedený algoritmus, pridať nový počiatočný neterminál σ', pravidlo $\sigma' \to \sigma$ a ak $\sigma \in E$, tak aj pravidlo $\sigma' \to \varepsilon$.

Literatúra

[1] Ginsburg, S.: *The Mathematical Theory of Context Free Languages*. New York : McGraw-Hill, 1966.