Poznámky k cvičeniu č. 2

Peter Kostolányi

28. septembra 2016

Zobrazenia, obrazy a inverzné obrazy

Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. *Obraz prvku* $x \in X$ pri zobrazení f sa tradične označuje symbolom $f(x)$. Pojem obrazu možno prirodzeným spôsobom rozšíriť aj na podmnožiny X.

Definícia 1. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $X' \subseteq X$. *Obraz množiny* X' pri zobrazení f je množina

$$f(X') = \{f(x) \mid x \in X'\}.$$

Podobne možno definovať aj inverzný obraz množiny $Y' \subseteq Y$ ako množinu všetkých prvkov z X, ktoré sa zobrazia na prvok z Y'. Formálne:

Definícia 2. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $Y' \subseteq Y$. *Inverzný obraz množiny* Y' pri zobrazení f je množina

$$f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}.$$

V prípade, že je zobrazenie $f\colon X \to Y$ bijektívne, zvykne sa symbolom f^{-1} označovať *inverzné zobrazenie* k zobrazeniu f. Táto notácia súhlasí s notáciou inverzného obrazu zavedenou v definícii 2: inverzný obraz množiny Y' pri bijektívnom zobrazení f je obraz množiny Y' pri inverznom zobrazení f^{-1}.

Inverzný obraz prvku y možno definovať pre ľubovoľné (teda nie len bijektívne) zobrazenia ako inverzný obraz jednoprvkovej množiny $\{y\}$.

Definícia 3. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $y \in Y$. *Inverzný obraz prvku* y pri zobrazení f je množina

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) \in \{y\}\} = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

V prípade, že je zobrazenie f bijektívne, je inverzný obraz $f^{-1}(y)$ jednoprvková množina. To úplne nesúhlasí s notáciou pre inverzné zobrazenia, kde $f^{-1}(y)$ označuje priamo prvok tejto jednoprvkovej množiny. Tieto dva objekty sa však v matematike často vzájomne zamieňajú, takže uvedenú nejednoznačnosť nie je nutné prežívať príliš tragicky.

Homomorfizmus

Pod pojmom homomorfizmus sa v matematike chápe štruktúru zachovávajúce zobrazenie (kde pod štruktúrou možno rozumieť napr. grupovú štruktúru, vektorovú štruktúru[1] a pod.). Štruktúra slov nad abecedou Σ je daná predovšetkým operáciou zreťazenia a pod homomorfizmom teda rozumieme zobrazenie, ktoré túto operáciu zachováva.

Definícia 4. Nech Σ, Γ sú abecedy a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je zobrazenie. Zobrazenie h sa nazýva *homomorfizmus* zo Σ^* do Γ^*, ak pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ platí

$$h(uv) = h(u)h(v).$$

Ak navyše pre každé $w \in \Sigma^+$ platí $h(w) \in \Gamma^+$, nazýva sa homomorfizmus h *nevymazávajúci*.

Neskôr ukážeme, že takto definovaný homomorfizmus je v skutočnosti homomorfizmom monoidov. V rámci notačnej konvencie budeme homomorfizmy väčšinou označovať symbolom h s prípadnými indexmi alebo inými „ozdobami“.

V nasledujúcich troch tvrdeniach postupne dokážeme, že homomorfný obraz prázdneho slova je vždy prázdne slovo, že každé zobrazenie písmen zo Σ do Γ^* možno rozšíriť na homomorfizmus zo Σ^* do Γ^* a že každý homomorfizmus je jednoznačne určený obrazmi písmen.

[1] Homomorfizmy medzi vektorovými priestormi sú známe skôr ako *lineárne zobrazenia*.

Tvrdenie 1. *Nech Σ, Γ sú abecedy a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus. Potom $h(\varepsilon) = \varepsilon$.*

Dôkaz. Sporom. Nech $h(\varepsilon) = x$ pre nejaké $x \in \Gamma^+$. Potom pre každé $u \in \Sigma^*$ z definície homomorfizmu vyplýva

$$h(u) = h(u\varepsilon) = h(u)h(\varepsilon) = h(u)x,$$

čo je spor, keďže rovnosť $h(u) = h(u)x$ nemôže platiť pre žiadne neprázdne slovo x. □

Tvrdenie 2. *Nech Σ, Γ sú abecedy a $f\colon \Sigma \to \Gamma^*$ je zobrazenie. Potom existuje homomorfizmus $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ taký, že pre všetky $c \in \Sigma$ platí $h(c) = f(c)$.*

Dôkaz. Matematickou indukciou by sme ľahko dokázali, že zobrazenie $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$, dané pre všetky $w = a_1 \dots a_k$, $a_1, \dots, a_k \in \Sigma$ ako $h(a_1 \dots a_k) = f(a_1) \dots f(a_k)$ – z uvedeného zápisu vyplýva aj $h(\varepsilon) = \varepsilon$ – je homomorfizmus. □

Tvrdenie 3. *Nech Σ, Γ sú abecedy a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus. Nech $h'\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus taký, že pre všetky $c \in \Sigma$ platí $h'(c) = h(c)$. Potom $h' = h$.*

Dôkaz. Treba dokázať, že pre všetky $w \in \Sigma^*$ platí $h'(w) = h(w)$. Z tvrdenia 1 a predpokladu na homomorfizmus h' vyplýva, že rovnosť platí pre všetky w také, že $|w| \leq 1$. Nech teraz $|w| = k > 1$. Potom $w = a_1 \dots a_k$ pre nejaké $a_1, \dots, a_k \in \Sigma$. Matematickou indukciou by sme ľahko dokázali, že z definície homomorfizmu vyplýva $h(w) = h(a_1) \dots h(a_k)$ a $h'(w) = h'(a_1) \dots h'(a_k)$. Keďže ale pre všetky $c \in \Sigma$ platí $h'(c) = h(c)$, z uvedených dvoch rovností vyplýva $h'(w) = h(w)$, čo bolo treba dokázať. □

Homomorfizmy budeme zvyčajne – vďaka tvrdeniu 2 zmysluplne a vďaka tvrdeniu 3 jednoznačne – zadávať práve homomorfnými obrazmi jednotlivých symbolov abecedy. Obraz jazyka L pri zobrazení homomorfizmom h je definovaný jednoducho ako obraz množiny L pri zobrazení h v zmysle definície 1.

Definícia 5. Nech Σ, Γ sú abecedy, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus a $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk. *Obraz jazyka L pri zobrazení homomorfizmom h* je jazyk $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

Príklad 1. Nech $\Sigma = \{a, b\}$ a $h\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ je homomorfizmus daný ako $h(a) = ab$ a $h(b) = \varepsilon$. Nech $L_1 = \{b, bb\}$, $L_2 = \{b, bb, abb\}$, $L_3 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$. Obrazy týchto jazykov pri zobrazení homomorfizmom h sú dané nasledovne:

$$\begin{aligned} h(L_1) &= \{\varepsilon\}, \\ h(L_2) &= \{\varepsilon, ab\}, \\ h(L_3) &= \{ab\}^*, \\ h(L_4) &= \{ab\}^*. \end{aligned}$$

Úloha 1. Nech L_1, L_2 sú jazyky, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus a $\Sigma_{L_1}, \Sigma_{L_2} \subseteq \Sigma$. Porovnajte jazyky $h(L_1 \cup L_2)$ a $h(L_1) \cup h(L_2)$.

Riešenie. Dokážeme, že platia obidve inklúzie, a teda $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$.

- $\subseteq$: Nech $u \in h(L_1 \cup L_2)$. Z definície 5 vyplýva, že existuje $v \in L_1 \cup L_2$ také, že $u = h(v)$. Keďže $v \in L_1 \cup L_2$, musí platiť $v \in L_1$ alebo $v \in L_2$ (alebo oboje). Ak $v \in L_1$, $u = h(v) \in h(L_1)$. Ak $v \in L_2$, $u = h(v) \in h(L_2)$. Keďže ale $h(L_1), h(L_2) \subseteq h(L_1) \cup h(L_2)$, v oboch prípadoch máme $u \in h(L_1) \cup h(L_2)$.

- $\supseteq$: Nech $u \in h(L_1) \cup h(L_2)$. Potom $u \in h(L_1)$ alebo $u \in h(L_2)$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $u \in h(L_1)$. Potom z definície 5 vyplýva, že existuje $v \in L_1$ také, že $u = h(v)$. Keďže $v \in L_1$, platí aj $v \in L_1 \cup L_2$. Preto $u = h(v) \in h(L_1 \cup L_2)$, čo bolo treba dokázať.

Tvrdenie je dokázané. □

Úloha 2. Nech L_1, L_2 sú jazyky, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus a $\Sigma_{L_1}, \Sigma_{L_2} \subseteq \Sigma$. Porovnajte jazyky $h(L_1 \cdot L_2)$ a $h(L_1) \cdot h(L_2)$.

Riešenie. Dokážeme, že platia obidve inklúzie, a teda $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$.

- $\subseteq$: Nech $u \in h(L_1 \cdot L_2)$. Potom existuje $v \in L_1 \cdot L_2$ také, že $h(v) = u$. Keďže $v \in L_1 \cdot L_2$, existujú slová $x \in L_1$ a $y \in L_2$ tak, že $v = xy$. Z definície homomorfizmu potom vyplýva $u = h(v) = h(xy) = h(x)h(y) \in h(L_1) \cdot h(L_2)$.
- $\supseteq$: Nech $u \in h(L_1) \cdot h(L_2)$. Potom existujú slová $x \in L_1$ a $y \in L_2$ také, že $u = h(x)h(y)$. Z definície homomorfizmu potom vyplýva $u = h(x)h(y) = h(xy) \in h(L_1 \cdot L_2)$.

Tvrdenie je dokázané. □

Inverzný homomorfizmus

Obraz jazyka pri zobrazení inverzným homomorfizmom je inverzný obraz v zmysle definícií 2 a 3, kde príslušné zobrazenie je homomorfizmus.

Definícia 6. Nech Σ, Γ sú abecedy, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus a $L \subseteq \Gamma^*$ je jazyk. *Obraz jazyka L pri zobrazení inverzným homomorfizmom h^{-1}* je jazyk $h^{-1}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid h(u) \in L\}$.

Definícia 7. Nech Σ, Γ sú abecedy, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus a $v \in \Gamma^*$ je slovo. *Obraz slova v pri zobrazení inverzným homomorfizmom h^{-1}* je jazyk

$$h^{-1}(v) = h^{-1}(\{v\}) = \{u \in \Sigma^* \mid h(u) \in \{v\}\} = \{u \in \Sigma^* \mid h(u) = v\}.$$

O niečo presnejšie by bolo namiesto o „obraze pri zobrazení inverzným homomorfizmom h^{-1}“ hovoriť o „inverznom obraze pri homomorfizme h“, prípadne o „inverznom homomorfnom obraze“. Ide však o zaužívanú terminológiu súvisiacu s predstavou inverzného homomorfizmu ako zobrazenia $h^{-1}\colon \Gamma^* \to 2^{\Sigma^*}$. Takáto predstava môže byť občas užitočná, podobne ako predstava o zobrazeniach $h\colon 2^{\Sigma^*} \to 2^{\Gamma^*}$ a $h^{-1}\colon 2^{\Gamma^*} \to 2^{\Sigma^*}$.

Z uvedených definícií je zrejmé, že pre každý homomorfizmus $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ a jazyk $L \subseteq \Gamma^*$ platí

$$h^{-1}(L) = \bigcup_{w \in L} h^{-1}(w).$$

Príklad 2. Nech $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b\}$ a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus daný ako $h(a) = ab$, $h(b) = a$ a $h(c) = ab$. Potom napríklad $h^{-1}(aab) = \{ba, bc\}$ a $h^{-1}(b) = h^{-1}(bb) = \emptyset$. V dôsledku toho napríklad pre $L = \{b, aab\}$ platí $h^{-1}(L) = \{ba, bc\}$.

Úloha 3. Nech $h\colon \{a, b\}^* \to \{c, d\}^*$ je homomorfizmus daný ako $h(a) = c$ a $h(b) = cd$. Nájdite nasledujúce jazyky:

a) $h^{-1}(L_1)$, kde $L_1 = \{c^n d^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

b) $h^{-1}(L_2)$, kde $L_2 = \{c^n d^n \mid n \in \mathbb{N};\ n \geq 1\}$.

c) $h^{-1}(L_3)$, kde $L_3 = \{c^n d^n \mid n \in \mathbb{N};\ n \geq 2\}$.

Riešenie. Ľahko možno nahliadnuť, že jazyk $h^{-1}(w)$ je pre slovo $w \in \{c, d\}^*$ neprázdny vtedy a len vtedy, keď sa pred každým výskytom symbolu d v slove w nachádza symbol c. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq 2$ teda platí $h^{-1}(c^n d^n) = \emptyset$. Ďalej, $h^{-1}(cd) = \{b\}$ a $h^{-1}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$. Preto:

a) $h^{-1}(L_1) = \bigcup_{w \in L_1} h^{-1}(w) = \{\varepsilon, b\}$.

b) $h^{-1}(L_2) = \bigcup_{w \in L_2} h^{-1}(w) = \{b\}$.

c) $h^{-1}(L_2) = \bigcup_{w \in L_3} h^{-1}(w) = \emptyset$. □

Úloha 4. Nech L_1, L_2 sú jazyky, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus a $\Sigma_{L_1}, \Sigma_{L_2} \subseteq \Gamma$. Porovnajte jazyky $h^{-1}(L_1 \cdot L_2)$ a $h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$.

Riešenie. Dokážeme, že $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) \supseteq h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$, kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

- $\not\subseteq$: Uvažujme napríklad homomorfizmus $h\colon \{a\}^* \to \{a\}^*$ daný ako $h(a) = aa$ a jazyk $L = \{a\}$. Potom $h^{-1}(L \cdot L) = \{a\}$, kým $h^{-1}(L) \cdot h^{-1}(L) = \emptyset$.
- $\supseteq$: Nech $w \in h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$. Potom $w = uv$ pre nejaké $u \in h^{-1}(L_1)$ a $v \in h^{-1}(L_2)$. Z definície inverzného homomorfizmu vyplýva $h(u) \in L_1$ a $h(v) \in L_2$. Preto dostávame $h(w) = h(uv) = h(u)h(v) \in L_1 \cdot L_2$, a teda $w \in h^{-1}(L_1 \cdot L_2)$.

Tvrdenie je dokázané. □

Úloha 5. Nech L je jazyk, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus a $\Sigma_L \subseteq \Gamma$. Porovnajte jazyky L a $h(h^{-1}(L))$.

Riešenie. Dokážeme, že $L \supseteq h(h^{-1}(L))$, pričom opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

- $\not\subseteq$ Nech $L = \{a\}$ a $h\colon \{a\}^* \to \{a\}^*$ je daný ako $h(a) = aa$. Potom $h(h^{-1}(L)) = h(\emptyset) = \emptyset$, čo nie je nadjazyk jazyka L.
- $\supseteq$ Nech $w \in h(h^{-1}(L))$. Potom existuje $u \in h^{-1}(L)$ také, že $w = h(u)$. Keďže $u \in h^{-1}(L)$, z definície inverzného homomorfizmu máme $h(u) \in L$ a z rovnosti $w = h(u)$ potom vyplýva $w \in L$. □

Úloha 6. Nech L je jazyk, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus a $\Sigma_L \subseteq \Sigma$. Porovnajte jazyky L a $h^{-1}(h(L))$.

Riešenie. Dokážeme, že $L \subseteq h^{-1}(h(L))$, pričom opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

- $\subseteq$: Nech $w \in L$. Potom $h(w) \in h(L)$, z čoho $w \in h^{-1}(h(L))$.
- $\not\supseteq$: Nech $L = \{a\}$ a $h\colon \{a, b\}^* \to \{a\}^*$ je definovaný ako $h(a) = h(b) = a$. Potom dostávame $h^{-1}(h(L)) = h^{-1}(\{a\}) = \{a, b\}$, čo nie je podjazyk jazyka L. □

* Voľný monoid

Zreťazenie slov je zjavne asociatívne a ε je neutrálny prvok vzhľadom na túto operáciu. Pre každú abecedu Σ tak jazyk Σ^* tvorí s operáciou zreťazenia tzv. *voľný monoid* nad Σ.[2]

Definícia 8. *Grupoid* je usporiadaná dvojica $(X, \circ)$, kde X je množina a $\circ\colon X \times X \to X$ je binárna operácia na X. *Pologrupa* je grupoid, pre ktorý navyše platí:

(*i*) Asociatívnosť: $\forall x, y, z \in X : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.

Pologrupa s jednotkou alebo *monoid* je pologrupa, pre ktorú navyše platí:

(*ii*) Existencia neutrálneho prvku: $\exists e_X \in X\ \forall x \in X : x \circ e_X = e_X \circ x = x$.

Grupa je monoid, pre ktorý navyše platí:

(*iii*) Existencia inverzných prvkov: $\forall x \in X\ \exists x^{-1} \in X : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e_X$.

Tvrdenie 4. *Nech Σ je abeceda. Potom $(\Sigma^*, \cdot)$ je monoid, ktorý sa nazýva* voľný monoid nad abecedou Σ.

Dôkaz. Zrejmé z definície zreťazenia. □

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Free_monoid`

Homomorfizmus medzi monoidmi $(X, \circ)$ a $(Y, \bullet)$ je ľubovoľné zobrazenie $h\colon X \to Y$ spĺňajúce $h(x \circ y) = h(x) \bullet h(y)$ pre všetky $x, y \in X$ a $h(e_X) = e_Y$. Homomorfizmus slov $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ by sme teda mohli – vďaka tvrdeniu 1 – definovať jednoducho ako homomorfizmus medzi monoidmi $(\Sigma^*, \cdot)$ a $(\Gamma^*, \cdot)$.

Zvyčajná definícia voľného monoidu je ale o niečo všeobecnejšia – kľúčová je pri nej vlastnosť homomorfizmov slov, ktorú sme sformulovali v tvrdeniach 2 a 3: každé zobrazenie priraďujúce písmenám abecedy slová jednoznačne určuje homomorfizmus. Ľahko možno nahliadnuť, že táto vlastnosť zostáva v platnosti aj pre homomorfizmy z voľného monoidu do ľubovoľného monoidu. Formálne potom definujeme voľný monoid $(X, \circ)$ nad podmnožinou $X' \subseteq X$ nasledovne.

Definícia 9. Nech $(X, \circ)$ je monoid a $X' \subseteq X$. Monoid $(X, \circ)$ je *voľný nad* X', ak pre každý monoid $(Y, \bullet)$ a každé zobrazenie $f\colon X' \to Y$ existuje práve jeden homomorfizmus $h\colon X \to Y$ taký, že pre všetky $x \in X'$ platí $h(x) = f(x)$.

Dá sa dokázať, že ľubovoľný monoid voľný nad Σ v zmysle definície 9 je izomorfný s voľným monoidom $(\Sigma^*, \cdot)$.

Monoid nie je jedinou algebraickou štruktúrou, pre ktorú sa dá definovať vlastnosť voľnosti. Analogicky by sa dala definovať napríklad *voľná pologrupa* alebo *voľná grupa*. V skutočnosti je voľnosť dokonca tzv. *univerzálna vlastnosť*, čiže vlastnosť, ktorá sa pomocou teórie kategórií definuje konzistentne pre všetky druhy algebraických štruktúr.

* Polokruh formálnych jazykov

Nech Σ je abeceda. Množina 2^{Σ^*} všetkých formálnych jazykov nad abecedou Σ tvorí s aditívnou operáciou zjednotenia a multiplikatívnou operáciou zreťazenia polokruh, čo je algebraická štruktúra definovaná nasledovne:

Definícia 10. *Polokruh* je usporiadaná trojica $(S, +, \cdot)$, kde S je množina, $+\colon S \times S \to S$ a $\cdot\colon S \times S \to S$ sú binárne operácie na S a kde platí:

(*i*) $(S, +)$ je komutatívny monoid s neutrálnym prvkom 0_S.

(*ii*) $(S, \cdot)$ je monoid s neutrálnym prvkom 1_S.

(*iii*) Platia distributívne zákony: $\forall x, y, z \in S : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ a $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$.

(*iv*) Pre každé $x \in S$ platí $x \cdot 0_S = 0_S \cdot x = 0_S$.

Poznámka 1. Takto definovaná štruktúra sa niekedy nazýva aj *polokruh s jednotkou*, pričom u všeobecného polokruhu sa nepožaduje existencia multiplikatívneho neutrálneho prvku (teda v podmienke (*ii*) sa iba vyžaduje, aby $(S, \cdot)$ bola pologrupa).[3] V teoretickej informatike sa však takmer výhradne používa horeuvedená definícia.

Tvrdenie 5. *Nech Σ je abeceda. Potom $(2^{\Sigma^*}, \cup, \cdot)$ je polokruh nazývaný* polokruh formálnych jazykov *nad Σ, s aditívnym neutrálnym prvkom $\emptyset$ a multiplikatívnym neutrálnym prvkom $\{\varepsilon\}$.*

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi ako elementárne cvičenie. □

Homomorfizmus medzi polokruhmi $(S, +_S, \cdot_S), (T, +_T, \cdot_T)$ je ľubovoľné zobrazenie $h\colon S \to T$ také, že $h(0_S) = 0_T$, $h(1_S) = 1_T$ a pre všetky $x, y \in S$ platí $h(x +_S y) = h(x) +_T h(y)$ a $h(x \cdot_S y) = h(x) \cdot_T h(y)$. Ak homomorfizmus jazykov chápeme ako zobrazenie $h\colon 2^{\Sigma^*} \to 2^{\Gamma^*}$, je takto definované zobrazenie aj homomorfizmom v polokruhu formálnych jazykov. To platí vďaka identite $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$ dokázanej v úlohe 1 a vďaka identite $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$ dokázanej v úlohe 2.

[3] Rovnaká situácia je aj pri definíciách okruhu.