A-prekladače

Peter Kostolányi

21. februára 2017

Základné definície

Pod *a-prekladačom* rozumieme, zhruba povedané, konečný automat s výstupom. Ide teda o nedeterministický konečný automat, ktorý popri čítaní vstupu z jednosmernej vstupnej pásky zároveň zapisuje výstup na jednosmernú výstupnú pásku.

Obidve hlavy a-prekladača – vstupná aj výstupná – sú *pružné*. V jednom kroku výpočtu sa teda *niekoľko* symbolov prečíta zo vstupu a iných *niekoľko* symbolov sa zapíše na výstup; podmienkou je ale konečnosť množiny všetkých prechodov. V dôsledku toho môže a-prekladač čítať aj zapisovať prázdne slovo. Ľahko nahliadnuť, že kým pružná hlava nie je pre silu a-prekladačov nijak obzvlášť dôležitá, možnosť čítania a zapisovania slova ε je v tomto ohľade zásadná.

Výpočet a-prekladača sa považuje za úspešný iba v prípade, že končí v akceptačnom stave pri dočítaní vstupu. V takom prípade reprezentuje slovo na výstupe jeden z možných prekladov slova na vstupe. Vďaka nedeterminizmu môže jednému vstupu zodpovedať aj viacero výstupov.

Definícia 1. *Konečnestavový prekladač s akceptačnými stavmi* (skrátene *a-prekladač*) je usporiadaná šestica $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$, kde K je neprázdna konečná množina stavov, Σ_1 je vstupná abeceda, Σ_2 je výstupná abeceda, $H \subseteq_{kon} K \times \Sigma_1^* \times \Sigma_2^* \times K$ je prechodová relácia, $q_0 \in K$ je počiatočný stav a $F \subseteq K$ je množina akceptačných stavov.

Štvoricu (p, u, v, q), ktorá je prvkom prechodovej relácie H interpretujeme tak, že a-prekladač M môže v stave p prečítať zo vstupu slovo u, na výstup zapísať slovo v a prejsť do stavu q. Túto ideu formalizujeme v nasledujúcich dvoch definíciách.

Definícia 2. Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač. *Konfigurácia* a-prekladača M je trojica $(q, u, v) \in K \times \Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$.

Jednotlivé zložky konfigurácie (q, u, v) pritom postupne reprezentujú stav a-prekladača, nedočítanú časť vstupného slova a doposiaľ zapísanú časť výstupného slova.

Definícia 3. Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač. *Krok výpočtu* a-prekladača M je relácia $\vdash_M$ na jeho konfiguráciách taká, že pre $p, q \in K$, $u, x \in \Sigma_1^*$ a $v, y \in \Sigma_2^*$ platí $(p, xu, v) \vdash_M (q, u, vy)$ práve vtedy, keď $(p, x, y, q) \in H$ (pričom v relácii $\vdash_M$ nie sú žiadne ďalšie dvojice konfigurácií). Ak nehrozí nedorozumenie, píšeme namiesto $\vdash_M$ len $\vdash$.

Na a-prekladače možno hľadieť z najmenej dvoch komplementárnych uhlov pohľadu, pričom každý má svoje opodstatnenie. Jednou z možností je skúmať všetky dvojice vstup-výstup ako reláciu medzi Σ_1^* a Σ_2^*. Vtedy hovoríme o *preklade* realizovanom a-prekladačom M ako o podmnožine karteziánskeho súčinu $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$; niekedy sa v tejto súvislosti používa aj pomenovanie *racionálna relácia*. Prekladmi sa budeme okrajovo zaoberať koncom tohto semestra.

Teraz ale budeme a-prekladače chápať predovšetkým ako zariadenia na *transformáciu jazykov* – teda ako špecifické *operácie na jazykoch*. Pre a-prekladač $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ a jazyk $L \subseteq \Sigma_1^*$ definujeme *obraz jazyka L pri zobrazení a-prekladačom M* ako jazyk $M(L)$ všetkých slov nad abecedou Σ_2, na ktoré možno a-prekladačom M preložiť niektoré slovo z L.

Definícia 4. Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač a $L \subseteq \Sigma_1^*$ je jazyk. *Obraz jazyka L pri zobrazení a-prekladačom M* je jazyk

$$M(L) = \{w \in \Sigma_2^* \mid \exists u \in L\ \exists q \in F : (q_0, u, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, w)\}.$$

Pre $w \in \Sigma_1^*$ niekedy píšeme namiesto $M(\{w\})$ len $M(w)$. Treba ale pamätať na to, že $M(w)$ je *jazyk*, ktorý nemusí byť jednoprvkový – môže byť napríklad aj nekonečný alebo prázdny.

Zobrazenia a-prekladačom a elementárne operácie na jazykoch

V nasledujúcom dokážeme, že zobrazenia a-prekladačom sú z istého pohľadu ekvivalentné trojici elementárnych operácií na jazykoch: *homomorfizmu*, *inverznému homomorfizmu* a *prieniku s regulárnym jazykom*. Ukážeme, že pre ľubovoľný a-prekladač M možno ním danú operáciu na jazykoch – priradenie $L \mapsto M(L)$ – vyjadriť iba pomocou týchto troch operácií. A naopak, homomorfizmus, inverzný homomorfizmus aj prienik s regulárnym jazykom možno chápať ako špeciálne prípady zobrazenia a-prekladačom.

Pri dôkaze prvého z týchto tvrdení budeme využívať pojem *akceptačného výpočtu* a-prekladača $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$, pod ktorým budeme rozumieť vhodnú postupnosť štvoríc (prechodov) z prechodovej relácie H. Takúto postupnosť štvoríc budeme chápať ako *slovo* nad abecedou H. Prv, než akceptačné výpočty definujeme, zaveďme ešte špeciálne homomorfizmy na H^*, takzvané *i-te projekcie*:

$$\mathrm{pr}_1\colon H^* \to K^*, \quad \mathrm{pr}_2\colon H^* \to \Sigma_1^*, \quad \mathrm{pr}_3\colon H^* \to \Sigma_2^* \quad \text{a} \quad \mathrm{pr}_4\colon H^* \to K^*.$$

Tie sú pre všetky $(p, u, v, q) \in H$ dané ako

$$\mathrm{pr}_1(p, u, v, q) = p, \quad \mathrm{pr}_2(p, u, v, q) = u, \quad \mathrm{pr}_3(p, u, v, q) = v \quad \text{a} \quad \mathrm{pr}_4(p, u, v, q) = q.$$

Čitateľ by túto definíciu istotne ľahko zovšeobecnil.

Definícia 5. Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač. *Neprázdnym akceptačným výpočtom* a-prekladača M nazveme slovo $h_1 \dots h_n \in H^+$ také, že:

(*i*) $\mathrm{pr}_1(h_1) = q_0$,

(*ii*) $\mathrm{pr}_1(h_{i+1}) = \mathrm{pr}_4(h_i)$ pre $i = 1, \dots, n-1$,

(*iii*) $\mathrm{pr}_4(h_n) \in F$.

Akceptačným výpočtom a-prekladača M nazveme ľubovoľný jeho neprázdny akceptačný výpočet a ak $q_0 \in F$, tak aj slovo ε.

Označenie 1. Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač. Symbolom Π_M označujeme *jazyk všetkých akceptačných výpočtov* a-prekladača M.

Tvrdenie 1. *Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač. Potom je jazyk Π_M regulárny.*

Dôkaz. Zjavne $\Pi_M = L(A_M)$ pre nedeterministický konečný automat $A_M = (K, H, \delta, q_0, F)$ taký, že pre všetky $p \in K$ a $h \in H$ s $\mathrm{pr}_1(h) = p$ platí $\delta(p, h) = \{\mathrm{pr}_4(h)\}$ a pre všetky ostatné dvojice $p \in K$ a $h \in H$ platí $\delta(p, h) = \emptyset$. (Takýto automat je v zásade deterministický, ale nemá úplnú prechodovú funkciu.) □

Teraz už môžeme ľahko uzavrieť, že zobrazenie a-prekladačom M možno vyjadriť pomocou homomorfizmu, inverzného homomorfizmu a prieniku s regulárnym jazykom.

Veta 1. *Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač a $L \subseteq \Sigma_1^*$ je jazyk. Potom*

$$M(L) = \mathrm{pr}_3(\mathrm{pr}_2^{-1}(L) \cap \Pi_M).$$

Dôkaz. Zrejmé. □

Dôsledok 1. *Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač. Potom existuje abeceda Σ_3, homomorfizmy $h_1\colon \Sigma_3^* \to \Sigma_1^*$, $h_2\colon \Sigma_3^* \to \Sigma_2^*$ a regulárny jazyk $R \subseteq \Sigma_3^*$ tak, že pre všetky jazyky $L \subseteq \Sigma_1^*$ platí $M(L) = h_2(h_1^{-1}(L) \cap R)$.*

Dôkaz. Vyplýva z tvrdenia 1, z vety 1 a zo skutočnosti, že i-te projekcie sú homomorfizmy. □

Zostáva ukázať, že ľubovoľný homomorfizmus, inverzný homomorfizmus, ako aj prienik s regulárnym jazykom možno realizovať pomocou a-prekladača. Konštrukcie takýchto a-prekladačov sú už ale pomerne jednoduchou záležitosťou.

Tvrdenie 2. *Nech Σ_1, Σ_2 sú abecedy a $h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ je homomorfizmus. Potom existuje a-prekladač $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ taký, že pre všetky $L \subseteq \Sigma_1^*$ platí $M(L) = h(L)$.*

Dôkaz. Stačí položiť $K = F = \{q_0\}$ a $H = \{(q_0, c, h(c), q_0) \mid c \in \Sigma\}$. $\square$

Tvrdenie 3. *Nech Σ_1, Σ_2 sú abecedy a $h\colon \Sigma_2^* \to \Sigma_1^*$ je homomorfizmus. Potom existuje a-prekladač $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ taký, že pre všetky $L \subseteq \Sigma_1^*$ platí $M(L) = h^{-1}(L)$.*

Dôkaz. Stačí položiť $K = F = \{q_0\}$ a $H = \{(q_0, h(c), c, q_0) \mid c \in \Sigma\}$. $\square$

Tvrdenie 4. *Nech Σ je abeceda a $R \subseteq \Sigma^*$ je ľubovoľný regulárny jazyk. Potom existuje a-prekladač $M = (K, \Sigma, \Sigma, H, q_0, F)$ taký, že pre všetky $L \subseteq \Sigma^*$ platí $M(L) = L \cap R$.*

Dôkaz. Nech $A_R = (K_R, \Sigma, \delta_R, q_{0,R}, F_R)$ je deterministický konečný automat taký, že $L(A) = R$. Potom stačí vziať $K = K_R$, $H = \{(q, c, c, \delta(q, c)) \mid q \in K;\ c \in \Sigma\}$, $q_0 = q_{0,R}$ a $F = F_R$. $\square$

Zobrazenie a-prekladačom je teda ekvivalentné, ako operácia na jazykoch, trojici horeuvedených operácií. Platí teda napríklad, že trieda jazykov $\mathscr{L}$ je uzavretá na zobrazenie a-prekladačom práve vtedy, keď je uzavretá súčasne na homomorfizmus, inverzný homomorfizmus a prienik s regulárnym jazykom. Dôsledkom tejto skutočnosti je, že triedy jazykov ako $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}_{CF}$, či $\mathscr{L}_{RE}$ sú uzavreté na zobrazenie a-prekladačom.

Riešené úlohy

Úloha 1. Popíšte:

a) Triedu všetkých jazykov L, pre ktoré existuje a-prekladač M taký, že $L = M(\emptyset)$.

b) Triedu všetkých jazykov L, pre ktoré existuje a-prekladač M taký, že $L = M(\{\varepsilon\})$.

Riešenie.

a) Dokážeme, že jediným takým jazykom L je prázdny jazyk $\emptyset$. Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ je a-prekladač. Z definície zobrazenia a-prekladačom dostávame

$$M(\emptyset) = \{v \in \Sigma_2^* \mid \exists u \in \emptyset\ \exists q \in F : (q_0, u, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, v)\}.$$

Keďže ale neexistuje žiadne $u \in \emptyset$, pre ľubovoľný a-prekladač M platí $M(\emptyset) = \emptyset$.

Ukážeme ešte, že k rovnakému záveru sa dá prísť aj s využitím charakterizácie zobrazení a-prekladačom pomocou homomorfizmu, inverzného homomorfizmu a prieniku s regulárnym jazykom. Z nej vyplýva, že

$$M(\emptyset) = h_2\left(h_1^{-1}(\emptyset) \cap R\right),$$

kde h_1, h_2 sú vhodné homomorfizmy a R je vhodný regulárny jazyk. Jazyk $h_1^{-1}(\emptyset)$ je však vždy prázdny (lebo obsahuje všetky slová, ktoré sa homomorfizmom h_1 zobrazia na nejaké slovo z prázdneho jazyka), a preto sú prázdne aj jazyky $h_1^{-1}(\emptyset) \cap R$ a $h_2\left(h_1^{-1}(\emptyset) \cap R\right)$.

b) Dokážeme, že v tomto prípade ide o triedu všetkých regulárnych jazykov $\mathscr{R}$:

$\subseteq$: Treba dokázať, že ak L je jazyk taký, že pre nejaký a-prekladač M platí $L = M(\{\varepsilon\})$, tak L je regulárny. To však priamo vyplýva zo skutočnosti, že jazyk $\{\varepsilon\}$ je regulárny a trieda jazykov $\mathscr{R}$ je uzavretá na zobrazenie a-prekladačom.

$\supseteq$: Ukážeme, že ku každému regulárnemu jazyku L vieme zostrojiť a-prekladač M_L taký, že $L = M_L(\{\varepsilon\})$.

Keďže je jazyk L regulárny, existuje DKA $A_L = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ taký, že $L(A_L) = L$. A-prekladač M_L bude simulovať automat A_L s tým rozdielom, že namiesto čítania zo vstupu bude zapisovať na výstup (a zo vstupu nebude čítať nič).

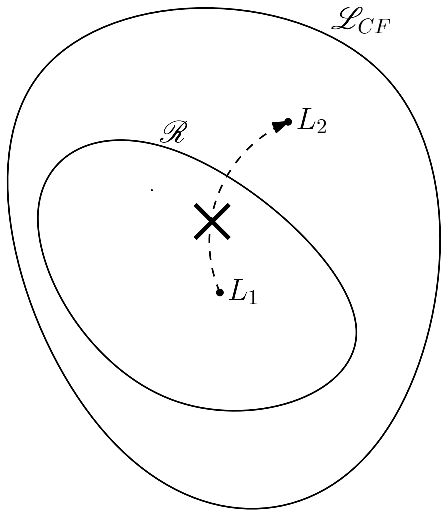
Formálne, $M_L = (K, \Sigma, \Sigma, H, q_0, F)$, kde $H = \{(q, \varepsilon, c, \delta(q, c)) \mid q \in K;\ c \in \Sigma\}$. Dôkaz tvrdenia $M_L(\{\varepsilon\}) = L$ prenechávame čitateľovi. $\square$

Úloha 2. Nech $L_1 = \{ab\}^*$ a $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zostrojte a-prekladač M taký, že $M(L_1) = L_2$ alebo dokážte, že sa to nedá.

Riešenie. Intuitívne by malo byť zrejmé, že takýto a-prekladač M neexistuje, pretože si „nemá kde zapamätať číslo n“.

Nejde však o *dôkaz* uvedenej skutočnosti. Techniky na dokazovanie neexistencie a-prekladačov sú vo všeobecnosti o poznanie komplikovanejšie, než napríklad techniky na dokazovanie neexistencie konečných automatov. V rámci tohto predmetu sa preto obmedzíme na najjednoduchšiu takúto techniku, ktorá spočíva v nájdení triedy jazykov $\mathscr{L}$ uzavretej na zobrazenie a-prekladačom, ktorá obsahuje jazyk L_1, ale neobsahuje jazyk L_2. Z uzavretosti triedy $\mathscr{L}$ na zobrazenie a-prekladačom vyplýva, že pre každý a-prekladač M musí platiť $M(L_1) \in \mathscr{L}$, a teda špeciálne aj $M(L_1) \neq L_2$. Inými slovami, táto technika spočíva v *separácii jazykov L_1 a L_2 triedou jazykov uzavretou na zobrazenie a-prekladačom.*

V prípade jazykov zo zadania stačí vziať triedu všetkých regulárnych jazykov $\mathscr{R}$. Keďže $L_1 \in \mathscr{R}$ a $L_2 \notin \mathscr{R}$, z uzavretosti triedy $\mathscr{R}$ na zobrazenie a-prekladačom priamo vyplýva, že pre žiaden a-prekladač nemôže platiť $M(L_1) = L_2$. Schéma dôkazu je znázornená na obrázku 1. $\square$



Obr. 1: Jazyky L_1 a L_2 možno separovať triedou jazykov $\mathscr{R}$. Keďže je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na zobrazenie a-prekladačom, nemôže existovať žiaden a-prekladač zobrazujúci jazyk L_1 na jazyk mimo $\mathscr{R}$, a teda ani na jazyk L_2.

Úloha 3. Nech L_1 a L_2 sú jazyky ako v predchádzajúcej úlohe. Zostrojte a-prekladač M taký, že $M(L_2) = L_1$ alebo dokážte, že sa to nedá.

Riešenie. Očividne stačí každý symbol a preložiť na slovo ab a všetky symboly b preložiť na ε. Formálnejšie, a-prekladač M možno zostrojiť nasledovne: $M = (K, \Sigma, \Sigma, H, q_0, F)$, kde $K = \{q_0\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $H = \{(q_0, a, ab, q_0), (q_0, b, \varepsilon, q_0)\}$ a $F = \{q_0\}$. Tvrdenie $M(L_2) = L_1$ by malo byť očividné a jeho dôkaz prenechávame čitateľovi. $\square$

Úloha 4. Nech $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ a $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zostrojte a-prekladač M taký, že $M(L_1) = L_2$ alebo dokážte, že sa to nedá.

Riešenie. Konštrukcia takéhoto a-prekladača M je založená na pozorovaní, že a-prekladač nemusí „využiť“ všetky slová zo vstupného jazyka L_1. V takom prípade môže pracovať napríklad tak, že každé slovo w preloží na seba samé s tým, že výpočet sa skončí úspešne iba v prípade, že w patrí do regulárneho jazyka $R = \{a^i b^j \mid i,j \in \mathbb{N}\}$. Je zrejmé, že $L_1 \cap R = L_2$, z čoho vyplýva aj správnosť takejto konštrukcie.

Formálne detaily konštrukcie možno vyriešiť napríklad nasledovne: $M = (K, \Sigma, \Sigma, H, q_0, F)$, kde $K = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $H = \{(q_0, a, a, q_0), (q_0, b, b, q_1), (q_1, b, b, q_1)\}$ a $F = \{q_0, q_1\}$. (V prípade, že vstupné slovo nepatrí do jazyka R, takýto a-prekladač ho nedočíta do konca). □