Riešenia úloh z veľkej písomky

Peter Kostolányi

15. decembra 2017

Úloha 1. O každom z nasledujúcich tvrdení rozhodnite, či je pravdivé a svoju odpoveď vyznačte krížikom do príslušného políčka.

		áno	**nie**
1.	Ak $L \subseteq \Sigma^*$ je konečný jazyk a $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus, tak aj $h^{-1}(h(L))$ je konečný jazyk.		$\times$
2.	Trieda všetkých konečných jazykov je uzavretá na zreťazenie, ale nie je uzavretá na iteráciu.	$\times$	
3.	Jazyk $L = \{uvu^R \mid u, v \in \{a,b\}^*\}$ je regulárny.	$\times$	
4.	Nech L, L_1, L_2 sú jazyky také, že $L = L_1 \cup L_2$ a $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Ak je jazyk L regulárny, musí byť regulárny aj aspoň jeden z jazykov L_1, L_2.		$\times$
5.	Ku každému $L \in \mathscr{R}$ existuje *práve jeden* deterministický konečný automat A taký, že $L(A) = L$.		$\times$
6.	Jazyk $L = \{a^i b^j a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}; i, j \geq 1\}$ je bezkontextový.		$\times$
7.	Nech L_1, L_2 sú jazyky. Ak $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$, tak $L_1 \cap L_2 \notin \mathscr{L}_{CF}$.		$\times$
8.	Ku každému $L \in \mathscr{L}_{RE}$ existuje deterministický Turingov stroj A s *práve jedným* akceptačným stavom taký, že $L(A) = L$.	$\times$	
9.	Existujú jazyky $L_1, L_2, L_3 \subseteq \{0,1\}^*$ také, že $L_1, L_3 \in \mathscr{L}_{rec}$, $L_2 \notin \mathscr{L}_{rec}$ a $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3$.	$\times$	
10.	Ak $L \notin \mathscr{L}_{rec}$, musí byť jazyk L^C nekonečný.	$\times$	

Riešenie.

1. **Nie**. Napríklad pre $h\colon \{a\}^* \to \{a\}^*$ daný ako $h(a) = \varepsilon$ a $L = \{a\}$ platí $h(L) = \{\varepsilon\}$ a $h^{-1}(h(L)) = \{a\}^*$.
2. **Áno**. Ľahko možno dokázať, že pre ľubovoľnú dvojicu konečných jazykov L_1, L_2 je $L_1 \cdot L_2$ konečný jazyk obsahujúci najviac $|L_1| \cdot |L_2|$ slov. Napríklad iterácia jazyka $\{a\}$ je naopak nekonečný jazyk.
3. **Áno**. Platí totiž $L = \{a,b\}^*$.
4. **Nie**. Nech napríklad $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$ a $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \neq w^R\}$. Potom zjavne $L_1 \notin \mathscr{R}$, $L_2 \notin \mathscr{R}$ a $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, ale $L_1 \cup L_2 = \{a,b\}^* \in \mathscr{R}$.
5. **Nie**. Zjavne napríklad existuje viac ako jeden deterministický konečný automat s prázdnou množinou akceptačných stavov; každý takýto automat ale akceptuje prázdny jazyk.
6. **Nie**. (Ľahké cvičenie na použitie pumpovacej lemy.)
7. **Nie**. Neplatí napríklad pre $L_1 = L_2 = \{a\}$.
8. **Áno**. Ak je Turingov stroj v normálnom tvare bez prechodov z akceptačných stavov, možno všetky akceptačné stavy „nahradiť jediným“.
9. **Áno**. Napríklad $L_1 = \emptyset$, $L_2 = L_D^C$ a $L_3 = \{0,1\}^*$.
10. **Áno**. Ak je totiž L^C konečný, je aj regulárny. Z uzavretosti triedy $\mathscr{R}$ na komplement potom vyplýva, že aj jazyk L je regulárny, a teda nemôže platiť $L \notin \mathscr{L}_{rec}$. □

Úloha 2. Zostrojte deterministický alebo nedeterministický konečný automat A taký, že

$$L(A) = \{bba^n \mid n \not\equiv 0 \pmod 5\}$$

Správnosť svojej konštrukcie *poriadne* dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že jazyk $L := \{bba^n \mid n \not\equiv 0 \pmod 5\}$ je akceptovaný nedeterministickým konečným automatom $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $K = \{q_\varepsilon, q_b\} \cup \mathbb{Z}_5$, $\Sigma = \{a, b\}$, $q_0 = q_\varepsilon$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ a

$$\begin{aligned}
&\delta(q_\varepsilon, b) = \{q_b\}, \\
&\delta(q_b, b) = \{0\}, \\
&\delta(p, a) = \{p + 1\}, \qquad \forall p \in \mathbb{Z}_5.
\end{aligned}$$

Pre stavy automatu A dokážeme nasledujúcu sadu invariantov:

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &: \forall w \in \Sigma^* : (q_\varepsilon, w) \vdash^* (q_\varepsilon, \varepsilon) \iff w = \varepsilon, \\
I_b &: \forall w \in \Sigma^* : (q_\varepsilon, w) \vdash^* (q_b, \varepsilon) \iff w = b, \\
I_0, \dots, I_4 &: \forall p \in \mathbb{Z}_5\ \forall w \in \Sigma^* : (q_\varepsilon, w) \vdash^* (p, \varepsilon) \iff w = bba^s,\ \text{kde } s \in \mathbb{N} \text{ a } s \equiv p \pmod 5.
\end{aligned}$$

Dokážeme postupne obidve implikácie, zakaždým pre všetky invarianty naraz.

$\Rightarrow$: Matematickou indukciou vzhľadom na $n \in \mathbb{N}$ dokážeme nasledujúce implikácie:

$$\begin{aligned}
I'_\varepsilon &: \forall w \in \Sigma^* : (q_\varepsilon, w) \vdash^n (q_\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow w = \varepsilon, \\
I'_b &: \forall w \in \Sigma^* : (q_\varepsilon, w) \vdash^n (q_b, \varepsilon) \Rightarrow w = b, \\
I'_0, \dots, I'_4 &: \forall p \in \mathbb{Z}_5\ \forall w \in \Sigma^* : (q_\varepsilon, w) \vdash^n (p, \varepsilon) \Rightarrow w = bba^s,\ \text{kde } s \in \mathbb{N} \text{ a } s \equiv p \pmod 5.
\end{aligned}$$

1. Pre $n = 0$ môže byť ľavá strana splnená iba pre implikáciu I'_ε. V takom prípade ale nutne $w = \varepsilon$ a tvrdenie platí.
2. Nech implikácie platia pre $n = k$. Ukážeme, že platia aj pre $n = k + 1$:

   I'_ε: Nech $w \in \Sigma^*$ je také, že $(q_\varepsilon, w) \vdash^{k+1} (q_\varepsilon, \varepsilon)$. To možno rozpísať ako $(q_\varepsilon, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (q_\varepsilon, \varepsilon)$, kde $q \in K$, $u \in \Sigma^*$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $w = uz$. V takom prípade musí platiť $q_\varepsilon \in \delta(q, z)$; také q a z ale neexistujú a implikácia teda triviálne platí.

   I'_b: Nech $w \in \Sigma^*$ je také, že $(q_\varepsilon, w) \vdash^{k+1} (q_b, \varepsilon)$. To možno rozpísať ako $(q_\varepsilon, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (q_b, \varepsilon)$, kde $q \in K$, $u \in \Sigma^*$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $w = uz$.

   a) Nech $z = a$. Pre stav q potom musí platiť $q_b \in \delta(q, a)$. Takýto stav ale neexistuje, takže implikácia triviálne platí.

   b) Nech $z = b$. Pre stav q musí platiť $q_b \in \delta(q, b)$. Potom nutne $q = q_\varepsilon$ a z indukčného predpokladu vyplýva $u = \varepsilon$. Preto $w = uz = b$ a tvrdenie platí.

   c) Prípad $z = \varepsilon$ je analogický prípadu $z = a$.

   $I'_0, \dots, I'_4$: Nech $p \in \mathbb{Z}_5$ a $w \in \Sigma^*$ je slovo také, že $(q_\varepsilon, w) \vdash^{k+1} (p, \varepsilon)$. To možno rozpísať aj ako $(q_\varepsilon, uz) \vdash^k (q, z) \vdash (p, \varepsilon)$, kde $q \in K$, $u \in \Sigma^*$, $z \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $w = uz$.

   a) Nech $z = a$. Pre stav q musí platiť $p \in \delta(q, a)$, a teda $q = p - 1$. Z indukčného predpokladu potom dostávame $u = bba^{s'}$ pre nejaké $s' \in \mathbb{N}$ také, že $s' \equiv p - 1 \pmod 5$. Preto $w = uz = bba^{s'+1}$, pričom $s' + 1 \equiv p \pmod 5$. Tvrdenie teda platí.

   b) Nech $z = b$. Pre stav q musí platiť $p \in \delta(q, b)$. Z toho vyplýva, že nutne $p = 0$ a $q = q_b$. Z indukčného predpokladu potom máme $u = b$, z čoho vyplýva $w = uz = bb = bba^0$. Tvrdenie teda platí.

   c) Nech $z = \varepsilon$. Pre stav q musí platiť $p \in \delta(q, \varepsilon)$. Takýto stav q ale neexistuje a implikácia je teda triviálne splnená.

$\Leftarrow$: Implikácie

$$I''_\varepsilon : \forall w \in \Sigma^* : w = \varepsilon \Rightarrow (q_\varepsilon, w) \vdash^* (q_\varepsilon, \varepsilon)$$

a

$$I_b'' \colon \forall w \in \Sigma^* : w = b \Rightarrow (q_\varepsilon, w) \vdash^* (q_b, \varepsilon)$$

sú zrejmé, keďže q_ε je počiatočný stav a $q_b \in \delta(q_\varepsilon, b)$.

Zostáva teda dokázať implikácie

$$I_0'', \ldots, I_4'' \colon \forall p \in \mathbb{Z}_5\ \forall w \in \Sigma^* : w = bba^s,\ \text{kde } s \in \mathbb{N} \text{ a } s \equiv p \pmod 5 \Rightarrow (q_\varepsilon, w) \vdash^* (p, \varepsilon).$$

Indukciou vzhľadom na s.

1. Ak $s = 0$, tak $w = bb$ a $(q_\varepsilon, bb) \vdash (q_b, b) \vdash (0, \varepsilon)$.
2. Nech implikácia platí pre $s = k$. Ukážeme, že platí aj pre $s = k + 1$.
   Nech $w = bba^{k+1}$, pričom $k+1 \equiv p \pmod 5$. Potom $w = bba^k a$, $k \equiv p-1 \pmod 5$ a z indukčného predpokladu dostávame
   $$(q_\varepsilon, bba^k a) \vdash^* (p-1, a) \vdash (p, \varepsilon),$$
   čo bolo treba dokázať.

Ostáva už len využiť platnosť invariantov na dôkaz samotného tvrdenia $L(A) = L$:

$\subseteq$: Nech $w \in L(A)$. Potom musí existovať $p \in F = \{1, 2, 3, 4\}$ také, že pre slovo w platí $(q_\varepsilon, w) \vdash^* (p, \varepsilon)$. Podľa invariantu I_p potom $w = bba^s$, kde $s \equiv p \pmod 5$, a teda $w \in L$.

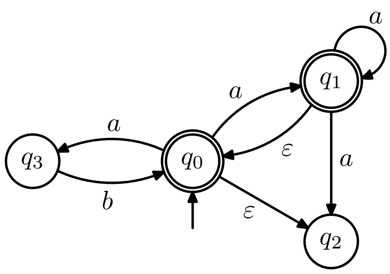
$\supseteq$: Nech $w \in L$. Potom musí existovať $p \in \mathbb{Z}_5 - \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$ také, že $w = bba^s$, kde $s \equiv p \pmod 5$. Podľa invariantu I_p potom $(q_\varepsilon, w) \vdash^* (p, \varepsilon)$, z čoho $w \in L(A)$.

Tvrdenie je dokázané. $\square$

Úloha 3.

a) Zistite, či je jazyk $L = \{ucv \mid u, v \in \{a,b\}^*;\ |u| \le |v|\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.

b) Uvažujme nedeterministický konečný automat $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ daný diagramom na obrázku 1. Zostrojte regulárnu gramatiku G takú, že platí $L(G) = L(A)$. V prípade použitia štandardnej konštrukcie z prednášky správnosť postupu dokazovať netreba.



Obr. 1: Prechodový diagram nedeterministického konečného automatu A.

Riešenie.

a) Dokážeme, že jazyk L *nie je regulárny*. Sporom, nech $L \in \mathscr{R}$ a nech $p, q \in \mathbb{N}$ sú čísla prislúchajúce jazyku L podľa pumpovacej lemy. Vezmime slovo $w = a^{p+q}ca^{p+q}$ – zjavne platí $w \in L$ a $|w| \ge p$. Preto existujú slová $u, x, v \in \{a,b,c\}^*$, pre ktoré sú splnené podmienky (i) až (iv) pumpovacej lemy.

Z podmienky (i) máme $w = uxv$. Z podmienok (ii) a (iii) vyplýva, že existujú $r, s \in \mathbb{N}$ také, že $s \ge 1$, $u = a^r$, $x = a^s$ a $v = a^{p+q-s-r}ca^{p+q}$.

Z podmienky (iv) pumpovacej lemy pre $i = 2$ nakoniec vyplýva, že slovo

$$ux^2v = a^r a^{2s} a^{p+q-s-r} ca^{p+q} = a^{p+q+s}ca^{p+q}$$

patrí do jazyka L. To je ale spor, pretože $s \ge 1$.

b) Štandardnou konštrukciou z prednášky dostávame gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $\sigma = q_0$ a

$$\begin{aligned} P = \{&q_0 \to aq_1 \mid q_2 \mid aq_3 \mid \varepsilon \\ &q_1 \to q_0 \mid aq_1 \mid aq_2 \mid \varepsilon \\ &q_3 \to bq_0\}. \end{aligned}$$

Z tvrdenia dokázaného na prednáške vyplýva, že platí $L(G) = L(A)$. $\square$

Úloha 4. Nech L je ľubovoľný jazyk. Jazyk

$$\mathrm{MIN}(L) = \{w \in L \mid \forall u, v \in \Sigma_L^* : (w = uv \ \wedge \ u \in L) \Rightarrow v = \varepsilon\}$$

potom obsahuje práve všetky slová w z jazyka L také, že L neobsahuje žiaden vlastný prefix slova w.

Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na operáciu MIN. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{R}$ *je uzavretá* na operáciu MIN. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je *deterministický* konečný automat taký, že $L(A) = L$. Zostrojíme *nedeterministický* konečný automat $A' = (K', \Sigma', \delta', q_0', F')$ taký, že $L(A') = \mathrm{MIN}(L)$.

Ľahko možno dokázať, že w patrí do $\mathrm{MIN}(L)$ práve vtedy, keď existuje výpočet automatu A na slove w, ktorý končí v akceptačnej konfigurácii, ale všetky ostatné jeho konfigurácie nie sú akceptačné. Automat A' teda môže pracovať podobne ako A, akurát bez možnosti „vykonať" prechody vedúce z akceptačných stavov. Formálne: $K' = K$, $\Sigma' = \Sigma$, $q_0' = q_0$, $F' = F$ a

$$\begin{aligned}
\delta'(q, c) &= \{\delta(q, c)\} && \forall q \in K - F \ \forall c \in \Sigma, \\
\delta'(q, c) &= \emptyset && \forall q \in F \ \forall c \in \Sigma, \\
\delta'(q, \varepsilon) &= \emptyset && \forall q \in K.
\end{aligned}$$

Formálny dôkaz tvrdenia $L(A') = \mathrm{MIN}(L)$ vynechávame. □

Úloha 5. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to \sigma\alpha \mid a\beta \mid \varepsilon \\ \alpha &\to a\alpha b \mid ba \\ \beta &\to a\beta b \mid a\beta \mid a\}. \end{aligned}$$

Zostrojte zásobníkový automat A taký, že $N(A) = L(G)$. V prípade použitia štandardnej konštrukcie z prednášky správnosť postupu dokazovať netreba.

Riešenie. Použitím štandardnej konštrukcie dostávame zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde $K = \{q_0\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \sigma, \alpha, \beta\}$, $Z_0 = \sigma$, $F = \emptyset$ a prechodová funkcia δ je daná nasledovne:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, \varepsilon, \sigma) &= \{(q_0, \alpha\sigma), (q_0, \beta a), (q_0, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_0, \varepsilon, \alpha) &= \{(q_0, b\alpha a), (q_0, ab)\}, \\ \delta(q_0, \varepsilon, \beta) &= \{(q_0, b\beta a), (q_0, \beta a), (q_0, a)\}, \\ \delta(q_0, a, a) &= \{(q_0, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_0, b, b) &= \{(q_0, \varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Z tvrdenia dokázaného na prednáške vyplýva $N(A) = L(G)$. $\square$

Úloha 6. Uvažujme rozhodovací problém daný nasledovne:

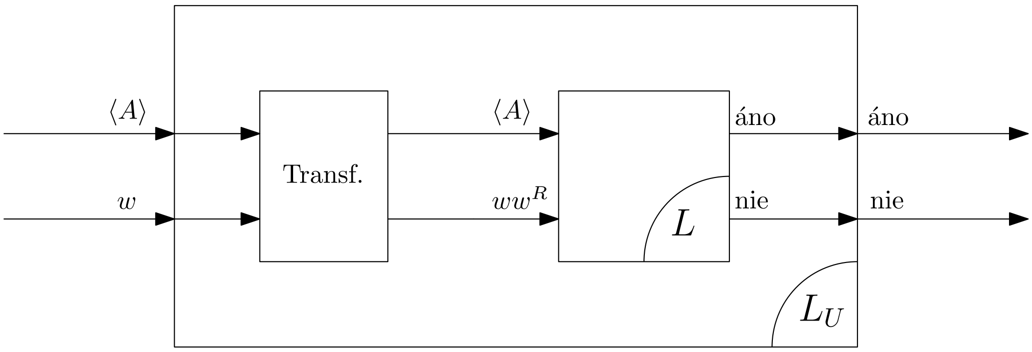
Vstup: Kód $\langle A \rangle$ deterministického Turingovho stroja A so vstupnou abecedou $\{0, 1\}$; slovo $w \in \{0, 1\}^*$.

Výstup: „Áno" práve vtedy, keď existuje slovo $u \in \{0, 1\}^*$ také, že $w = uu^R$ a $u \in L(A)$.

Zistite, či je uvedený problém rozhodnuteľný alebo aspoň rekurzívne vyčísliteľný. Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie. Problému zo zadania zodpovedá jazyk

$L = \{\langle A \rangle \# w \mid A$ je det. TS nad vstupnou abecedou $\{0, 1\}$; $w \in \{0, 1\}^*$; $\exists u \in \{0, 1\}^* : w = uu^R \wedge u \in L(A)\}$.



Obr. 2: Schéma redukcie univerzálneho problému na problém zo zadania.

Dokážeme, že problém zo zadania *nie je rozhodnuteľný*, ale *je rekurzívne vyčísliteľný* – jazyk L teda *patrí do* $\mathscr{L}_{RE}$, ale *nepatrí do* $\mathscr{L}_{rec}$.

Problém je zjavne rekurzívne vyčísliteľný – Turingov stroj akceptujúci jazyk L najprv overí, či $w = uu^R$ pre nejaké $u \in \{0, 1\}^*$ a ak áno, odsimuluje pre takéto u výpočet univerzálneho Turingovho stroja na vstupe $\langle A \rangle \# u$.

Nerozhodnuteľnosť dokážeme redukciou univerzálneho problému na problém zo zadania. Keby sme mali k dispozícii „čiernu krabičku" rozhodujúcu problém zo zadania, vedeli by sme skonštruovať aj Turingov stroj rozhodujúci univerzálny problém tak, že najprv upraví vstup $\langle A \rangle \# w$ na $\langle A \rangle \# ww^R$ a na ňom spustí „čiernu krabičku" pre problém zo zadania. Tá vráti odpoveď „áno" práve vtedy, keď $\langle A \rangle \# ww^R \in L$, čo je očividne práve vtedy, keď $w \in L(A)$ – čiže práve vtedy, keď $\langle A \rangle \# w \in L_U$. Výstup „čiernej krabičky" teda môžeme priamo použiť ako výstup stroja rozhodujúceho univerzálny problém. Schéma redukcie je na obrázku 2. $\square$

Úloha 7 (Prémia)**.** Nech L je ľubovoľný jazyk. Jazyk $\mathrm{MID}(L)$ je potom definovaný ako

$$\mathrm{MID}(L) = \{y \in \Sigma_L^* \mid \exists x, z \in \Sigma_L^* : |x| = |y| = |z| \;\wedge\; xyz \in L\}.$$

Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na operáciu MID. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{R}$ *je uzavretá* na operáciu MID. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je deterministický konečný automat taký, že $L(A) = L$. Zostrojíme deterministický konečný automat $A' = (K', \Sigma, \delta', q_0', F')$ taký, že $L(A') = \mathrm{MID}(L)$.

Za množinu stavov automatu A' vezmeme

$$K' = K^K \times (2^K)^K,$$

čiže množinu všetkých dvojíc $[\varphi_1, \varphi_2]$, kde $\varphi_1 \colon K \to K$ a $\varphi_2 \colon K \to 2^K$ sú zobrazenia (táto množina je očividne konečná). Prechodovú funkciu automatu A' a jeho počiatočný stav q_0' neskôr skonštruujeme tak, aby pre všetky $y \in \Sigma^*$ a všetky $[\varphi_1, \varphi_2] \in K'$ platilo $(q_0', y) \vdash_{A'}^* ([\varphi_1, \varphi_2], \varepsilon)$ práve vtedy, keď pre každé $p \in K$ je $\varphi_1(p)$ jediný stav automatu A taký, že $(p, y) \vdash_A^* (\varphi_1(p), \varepsilon)$ a $\varphi_2(p)$ je množina všetkých stavov r automatu A takých, že $(p, w) \vdash_A^* (r, \varepsilon)$ pre nejaké $w \in \Sigma^*$ spĺňajúce $|w| = |y|$.

Ak potom položíme

$$F' = \{[\varphi_1, \varphi_2] \in K' \mid \exists q_1, q_2 \in K \;\exists q_F \in F : q_1 \in \varphi_2(q_0) \;\wedge\; q_2 = \varphi_1(q_1) \;\wedge\; q_F \in \varphi_2(q_2)\},$$

automat A' bude zjavne akceptovať jazyk $\mathrm{MID}(L)$.

Zostáva teda dodefinovať q_0' a δ'. Za stav q_0' možno vziať dvojicu funkcií $[\iota_1, \iota_2]$, kde pre všetky $p \in K$ platí $\iota_1(p) = p$ a $\iota_2(p) = \{p\}$; pre $y = \varepsilon$ je v takom prípade želaný invariant zjavne splnený. Nech teraz $[\varphi_1, \varphi_2] \in K'$ a $c \in \Sigma$. Položme

$$\delta'([\varphi_1, \varphi_2], c) = [\varphi_1', \varphi_2'],$$

kde $\varphi_1' \colon K \to K$ je funkcia daná pre všetky $p \in K$ ako

$$\varphi_1'(p) = \delta(\varphi_1(p), c)$$

a kde $\varphi_2' \colon K \to 2^K$ je funkcia daná pre všetky $p \in K$ ako

$$\varphi_2'(p) = \{\delta(r, d) \mid r \in \varphi_2(p);\; d \in \Sigma\}.$$

Je potom zrejmé, že takto skonštruovaný automat bude mať požadovanú vlastnosť. $\square$