Riešenia úloh z malej písomky

Peter Kostolányi

20. apríla 2017

Úloha 1. Pomocou Myhillovej-Nerodovej vety dokážte, že jazyk

$$L = \{a^{n^2+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nie je regulárny.

Riešenie. Dokážeme, že pravá syntaktická ekvivalencia R_L indukovaná jazykom L nie je konečného indexu, z čoho podľa Myhillovej-Nerodovej vety vyplýva, že L nie je regulárny.

Zrejme stačí ukázať, že slovo a^{n^2+n} s $n \in \mathbb{N}$ nemôže byť v relácii R_L so slovom a^{m^2+m}, kde $m \in \mathbb{N}$ je také, že $m > n$. Za účelom sporu predpokladajme opak a vezmime $z = a^{2n+2}$. Potom $a^{n^2+n}z = a^{n^2+3n+2} = a^{(n+1)^2+(n+1)} \in L$, ale $a^{m^2+m}z = a^{m^2+m+2n+2} \notin L$, keďže

$$(m+1)^2 + (m+1) = m^2 + 3m + 2 > m^2 + m + 2n + 2.$$

To je spor s definíciou relácie R_L. $\square$

Úloha 2. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika, kde $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\sigma \to \alpha\alpha\beta \mid a\alpha b\beta \mid b \\ &\alpha \to \gamma\gamma \mid a \\ &\beta \to a\sigma\beta \mid ab \\ &\gamma \to b\gamma \mid b \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Preveďte gramatiku G do prísneho Chomského normálneho tvaru. V prípade použitia štandardnej konštrukcie správnosť postupu dokazovať netreba; v opačnom prípade je dôkaz nutný.

Riešenie. Gramatiku G najprv prevedieme do „bezepsilonového“ normálneho tvaru. Nájdeme preto množinu vymazávajúcich neterminálov E:

$$\begin{aligned} E_0 &= \{\gamma\}, \\ E_1 &= \{\alpha, \gamma\}, \\ E_2 &= \{\alpha, \gamma\} = E. \end{aligned}$$

Následne z množiny prepisovacích pravidiel odoberieme pravidlo $\gamma \to \varepsilon$ a pridáme pravidlá umožňujúce „vypustenie“ neterminálov z E (za predpokladu, že takýmto „vypustením“ nevznikne prázdne slovo). Tým dostaneme nasledujúcu sadu prepisovacích pravidiel:

$$\begin{aligned} &\sigma \to \alpha\alpha\beta \mid a\alpha b\beta \mid b \mid \alpha\beta \mid \beta \mid ab\beta \\ &\alpha \to \gamma\gamma \mid \gamma \mid a \\ &\beta \to a\sigma\beta \mid ab \\ &\gamma \to b\gamma \mid b. \end{aligned}$$

Odstránime teraz reťazové pravidlá (t.j. pravidlá $\sigma \to \beta$ a $\alpha \to \gamma$). Použitím štandardného postupu dostávame gramatiku s prepisovacími pravidlami

$$\begin{aligned} &\sigma \to \alpha\alpha\beta \mid a\alpha b\beta \mid b \mid \alpha\beta \mid ab\beta \mid a\sigma\beta \mid ab \\ &\alpha \to \gamma\gamma \mid a \mid b\gamma \mid b \\ &\beta \to a\sigma\beta \mid ab \\ &\gamma \to b\gamma \mid b. \end{aligned}$$

Zavedením neterminálov ξ_c a pravidiel $\xi_c \to c$ pre každý terminál c a zodpovedajúcim nahradením v pravých stranách dĺžky väčšej ako 1 dostávame sadu pravidiel

$$\begin{aligned}
\sigma &\to \alpha\alpha\beta \mid \xi_a\alpha\xi_b\beta \mid b \mid \alpha\beta \mid \xi_a\xi_b\beta \mid \xi_a\sigma\beta \mid \xi_a\xi_b \\
\alpha &\to \gamma\gamma \mid a \mid \xi_b\gamma \mid b \\
\beta &\to \xi_a\sigma\beta \mid \xi_a\xi_b \\
\gamma &\to \xi_b\gamma \mid b \\
\xi_a &\to a \\
\xi_b &\to b.
\end{aligned}$$

Napokon môžeme ošetriť „príliš dlhé“ pravé strany pravidiel. Zaveďme označenie

$$\begin{aligned}
\pi_1 &:= \sigma \to \alpha\alpha\beta, \\
\pi_2 &:= \sigma \to \xi_a\alpha\xi_b\beta, \\
\pi_3 &:= \sigma \to \xi_a\xi_b\beta, \\
\pi_4 &:= \sigma \to \xi_a\sigma\beta, \\
\pi_5 &:= \beta \to \xi_a\sigma\beta.
\end{aligned}$$

Pre výslednú gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$ potom dostávame

$$N' = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \xi_a, \xi_b, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_2,1}, \psi_{\pi_2,2}, \psi_{\pi_3,1}, \psi_{\pi_4,1}, \psi_{\pi_5,1}\}$$

a

$$\begin{aligned}
\sigma &\to \alpha\psi_{\pi_1,1} \mid \xi_a\psi_{\pi_2,1} \mid b \mid \alpha\beta \mid \xi_a\psi_{\pi_3,1} \mid \xi_a\psi_{\pi_4,1} \mid \xi_a\xi_b \\
\alpha &\to \gamma\gamma \mid a \mid \xi_b\gamma \mid b \\
\beta &\to \xi_a\psi_{\pi_5,1} \mid \xi_a\xi_b \\
\gamma &\to \xi_b\gamma \mid b \\
\psi_{\pi_1,1} &\to \alpha\beta \\
\psi_{\pi_2,1} &\to \alpha\psi_{\pi_2,2} \\
\psi_{\pi_2,2} &\to \xi_b\beta \\
\psi_{\pi_3,1} &\to \xi_b\beta \\
\psi_{\pi_4,1} &\to \sigma\beta \\
\psi_{\pi_5,1} &\to \sigma\beta \\
\xi_a &\to a \\
\xi_b &\to b.
\end{aligned}$$

□

Úloha 3. Uvažujme rozhodovací problém PKP$'$, kde na vstupe je prípad PKP, v ktorom je navyše každá „dlaždica“ ofarbená bielou alebo čiernou farbou a treba rozhodnúť, či má tento prípad riešenie, v ktorom sa použije nepárny počet bielych „dlaždíc“. Zistite, či je problém PKP$'$ rovnako ťažký ako PKP (vzhľadom na turingovskú redukciu) a svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Problémy *sú rovnako ťažke* – platí teda PKP$' \equiv_T$ PKP. Keby sme vedeli rozhodovať PKP$'$, vedeli by sme rozhodovať aj PKP. Stačilo by napríklad upraviť štandardnú redukciu MPKP na PKP tak, aby ku každej pôvodnej „dlaždici“ existovala aj počiatočná „dlaždica“. Následným ofarbením ukončovacej „dlaždice“ bielou farbou a zvyšných dlaždíc čiernou farbou získame prípad PKP$'$, ktorý má riešenie práve vtedy, keď má riešenie pôvodný prípad PKP.

Ostáva ukázať, že keby sme vedeli rozhodovať PKP, vedeli by sme rozhodovať aj PKP$'$. Majme daný prípad PKP$'$. Ten upravíme na prípad PKP pomocou omriežkovania, podobne ako pri štandardnej redukcii MPKP na PKP. Výsledná sada bude obsahovať jednu počiatočnú a zároveň ukončovaciu „dlaždicu“

$$\begin{array}{|c|}\hline \#\# \\ \hline \# \\ \hline\end{array}.$$

Pre každú čiernu „dlaždicu“

$$\begin{array}{|c|}\hline u \\ \hline v \\ \hline\end{array}$$

z prípadu PKP$'$ bude ďalej zodpovedajúci prípad PKP obsahovať „dlaždice“

$$\begin{array}{|c|}\hline \overline{u}\# \\ \hline \#\overline{v} \\ \hline\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline \#\overline{u} \\ \hline \overline{v}\# \\ \hline\end{array},$$

kde $\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = a_1\#a_2\#\dots\#a_n$. A nakoniec, pre každú bielu „dlaždicu“

$$\begin{array}{|c|}\hline u \\ \hline v \\ \hline\end{array}$$

bude zodpovedajúci prípad PKP obsahovať „dlaždice“

$$\begin{array}{|c|}\hline \overline{u} \\ \hline \#\overline{v}\# \\ \hline\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline \#\overline{u}\# \\ \hline \overline{v} \\ \hline\end{array}.$$

Ľahko možno nahliadnuť, že takýto prípad PKP má riešenie práve vtedy, keď má riešenie pôvodný prípad PKP$'$. □

Úloha 4. Zistite, či existuje algoritmus, ktorý pre ľubovoľný zásobníkový automat A rozhodne, či $L(A) = N(A)$. Svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Redukciou problému ekvivalencie dvojice bezkontextových jazykov na problém zo zadania dokážeme, že problém zo zadania *je nerozhodnuteľný*. Nech L_1 a L_2 sú bezkontextové jazyky (dané napríklad gramatikami). K nim možno algoritmicky zostrojiť zásobníkové automaty $A_1 = (K_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_{0,1}, Z_{0,1}, F_1)$ a $A_2 = (K_2, \Sigma_2, \Gamma_2, \delta_2, q_{0,2}, Z_{0,2}, F_2)$ také, že $L(A_1) = L_1$ a $N(A_2) = L_2$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, nech q_0 nepatrí do $K_1 \cup K_2$, nech Z_0 nepatrí do $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, nech $F_2 = \emptyset$ a nech A_1 na žiadnom vstupe nevyprázdni zásobník. Potom možno skonštruovať zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ daný nasledovne: $K = K_1 \cup K_2 \cup \{q_0\}$, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{Z_0\}$, $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_{0,1}, Z_{0,1}), (q_{0,2}, Z_{0,2})\}$, $\delta(q, z, Z) = \delta_1(q, z, Z)$ pre všetky $q \in K_1$, $z \in \Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}$ a $Z \in \Gamma_1$, $\delta(q, z, Z) = \delta_2(q, z, Z)$ pre všetky $q \in K_2$, $z \in \Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}$ a $Z \in \Gamma_2$ a $F = F_1$. Zrejme $L(A) = L(A_1) = L_1$ a $N(A) = N(A_2) = L_2$. Na rozhodnutie ekvivalencie jazykov L_1 a L_2 už potom „stačí“ overiť, či $L(A) = N(A)$. □