Riešenia úloh z malej písomky

Peter Kostolányi

13. novembra 2017

Úloha 1.

a) Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajte jazyky $(L_1 - L_2)^*$ a $L_1^* - L_2^*$.

b) Nech L je jazyk, $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ je homomorfizmus, $\Sigma_L \subseteq \Sigma$ a $n \in \mathbb{N}$. Porovnajte jazyky $h(L^n)$ a $(h(L))^n$.

Riešenie.

a) Dokážeme, že jazyky $(L_1 - L_2)^*$ a $L_1^* - L_2^*$ sú vo všeobecnosti neporovnateľné.

$\not\subseteq$: Uvažujme jazyky $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{aa\}$. Potom $L_1 - L_2 = \{a\}$, a teda $aa \in (L_1 - L_2)^*$. Zrejme ale tiež $aa \in L_2^*$, a teda $aa \notin L_1^* - L_2^*$.

$\not\supseteq$: Uvažujme jazyky $L_1 = \{a, b\}$ a $L_2 = \{b\}$. Potom pre slovo ab platí $ab \in L_1^*$ a zároveň $ab \notin L_2^*$; nutne teda $ab \in L_1^* - L_2^*$. Súčasne ale $L_1 - L_2 = \{a\}$, a teda $ab \notin (L_1 - L_2)^*$.

b) Dokážeme, že $h(L^n) = (h(L))^n$.

$\subseteq$: Nech $w \in h(L^n)$. Potom $w = h(u)$ pre nejaké $u \in L^n$. Keďže $u \in L^n$, existujú slová $u_1, \ldots, u_n \in L$ také, že $u = u_1 \ldots u_n$. Pre $i = 1, \ldots, n$ platí $u_i \in L$, z čoho dostávame $h(u_i) \in h(L)$. Preto $w = h(u) = h(u_1 \ldots u_n) = h(u_1) \ldots h(u_n) \in h(L)^n$.

$\supseteq$: Nech $w \in h(L)^n$. Potom existujú slová $w_1, \ldots, w_n \in h(L)$ také, že $w = w_1 \ldots w_n$. Pre $i = 1, \ldots, n$ platí $w_i \in h(L)$ – existuje teda $u_i \in L$ také, že $w_i = h(u_i)$. Pre slovo w potom dostávame $w = w_1 \ldots w_n = h(u_1) \ldots h(u_n) = h(u_1 \ldots u_n) \in h(L^n)$. $\square$

Úloha 2. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{&\sigma \to \sigma\sigma \mid a\alpha b\beta \mid \gamma \\ &\alpha \to a\alpha \mid b \\ &\beta \to a\beta\gamma \mid ab \\ &\gamma \to b\gamma \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Preveďte gramatiku G do Chomského normálneho tvaru.

Riešenie. Pre všetky $c \in T$ zaveďme nový neterminál ξ_c a pravidlo $\xi_c \to c$ a nahraďme v pôvodných pravidlách gramatiky G všetky terminály zodpovedajúcimi neterminálmi. Dostávame tak množinu pravidiel

$$\begin{aligned} P_1 = \{&\sigma \to \sigma\sigma \mid \xi_a\alpha\xi_b\beta \mid \gamma \\ &\alpha \to \xi_a\alpha \mid \xi_b \\ &\beta \to \xi_a\beta\gamma \mid \xi_a\xi_b \\ &\gamma \to \xi_b\gamma \mid \varepsilon \\ &\xi_a \to a \\ &\xi_b \to b\}. \end{aligned}$$

Zaveďme ďalej nový neterminál ξ_ε a pravidlo $\xi_\varepsilon \to \varepsilon$. Po doplnení „krátkych" pravých strán pravidiel týmto neterminálom dostávame množinu pravidiel

$$\begin{aligned}
P_2 = \{\sigma &\to \sigma\sigma \mid \xi_a\alpha\xi_b\beta \mid \gamma\xi_\varepsilon \\
\alpha &\to \xi_a\alpha \mid \xi_b\xi_\varepsilon \\
\beta &\to \xi_a\beta\gamma \mid \xi_a\xi_b \\
\gamma &\to \xi_b\gamma \mid \varepsilon \\
\xi_a &\to a \\
\xi_b &\to b \\
\xi_\varepsilon &\to \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

„Rozbime“ ešte „príliš dlhé“ pravé strany pravidiel pomocou nových neterminálov. Za týmto účelom zaveďme nasledujúce označenia pravidiel:

$$\begin{aligned}
\sigma &\to \xi_a\alpha\xi_b\beta \text{ označme ako } \pi_1, \\
\beta &\to \xi_a\beta\gamma \text{ označme ako } \pi_2.
\end{aligned}$$

Po vykonaní príslušnej transformácie dostávame bezkontextovú gramatiku $G' = (N', T, P', \sigma)$, kde $N' = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \xi_a, \xi_b, \xi_\varepsilon, \psi_{\pi_1,1}, \psi_{\pi_1,2}, \psi_{\pi_2,1}\}$ a

$$\begin{aligned}
P' = \{\sigma &\to \sigma\sigma \mid \xi_a\psi_{\pi_1,1} \mid \gamma\xi_\varepsilon \\
\alpha &\to \xi_a\alpha \mid \xi_b\xi_\varepsilon \\
\beta &\to \xi_a\psi_{\pi_2,1} \mid \xi_a\xi_b \\
\gamma &\to \xi_b\gamma \mid \varepsilon \\
\xi_a &\to a \\
\xi_b &\to b \\
\xi_\varepsilon &\to \varepsilon \\
\psi_{\pi_1,1} &\to \alpha\psi_{\pi_1,2} \\
\psi_{\pi_1,2} &\to \xi_b\beta \\
\psi_{\pi_2,1} &\to \beta\gamma\}.
\end{aligned}$$

Konštrukcia je týmto dokončená. $\square$

Úloha 3. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk $L = \{a^iba^jba^k \mid i, j, k \in \mathbb{N};\ i \leq k\}$. Správnosť svojej konštrukcie *poriadne* dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že jazyk L je generovaný bezkontextovou gramatikou $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{\sigma, \alpha\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned}
P = \{\sigma &\to a\sigma a \mid \sigma a \mid b\alpha b \\
\alpha &\to a\alpha \mid \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Rovnosť $L(G) = L$ zrejme vyplýva zo silnejšieho tvrdenia, že x je vetná forma v gramatike G práve vtedy, keď je pre x splnená niektorá z nasledujúcich podmienok:

(*i*) $x = a^i\sigma a^k$, kde $i, k \in \mathbb{N}$ a $i \leq k$.

(*ii*) $x = a^iba^j\alpha ba^k$, kde $i, j, k \in \mathbb{N}$ a $i \leq k$.

(*iii*) $x = a^iba^jba^k$, kde $i, j, k \in \mathbb{N}$ a $i \leq k$.

Pristúpme teraz k dôkazu jednotlivých inklúzií rovnosti $L(G) = L$ (budeme pritom dokazovať jednotlivé implikácie horeuvedeného silnejšieho tvrdenia).

$\subseteq$: Nech $x \in (N \cup T)^*$. Dokážeme, že ak pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ platí $\sigma \Rightarrow^n x$, tak je pre slovo x splnená jedna z podmienok (*i*) až (*iii*). Indukciou vzhľadom na n.

1. Nech $n = 0$. Ak $\sigma \Rightarrow^0 x$, tak nutne $x = \sigma$ – platí teda (i) pre $i = k = 0$.
2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n = k$. Dokážeme, že platí aj pre $n = k + 1$.
   Nech $\sigma \Rightarrow^{k+1} x$. To môžeme rozpísať ako $\sigma \Rightarrow^k y \Rightarrow x$, kde $y \in (N \cup T)^*$. Keďže je slovo y odvoditeľné v gramatike G na k krokov, vzťahuje sa na odvodenie $\sigma \Rightarrow^k y$ indukčný predpoklad – pre y teda platí jedna z podmienok (i) až (iii).
   (i) Nech $y = a^{i'}\sigma a^{k'}$, kde $i', k' \in \mathbb{N}$ a $i' \leq k'$. Keďže $y \Rightarrow x$, musí slovo x vzniknúť zo slova y použitím niektorého z pravidiel na neterminál σ (jediný neterminál v y).
   Ak ide o pravidlo $\sigma \to a\sigma a$, tak $x = a^{i'}a\sigma aa^{k'} = a^{i'+1}\sigma a^{k'+1}$. Keďže nerovnosť $i' \leq k'$ implikuje $i' + 1 \leq k' + 1$, je pre x splnená podmienka (i) s $i = i' + 1$ a $k = k' + 1$.
   Ak ide o pravidlo $\sigma \to \sigma a$, tak $x = a^{i'}\sigma aa^{k'} = a^{i'}\sigma a^{k'+1}$. Keďže nerovnosť $i' \leq k'$ implikuje $i' \leq k' + 1$, je pre x splnená podmienka (i) s $i = i'$ a $k = k' + 1$.
   Ak ide o $\sigma \to b\alpha b$, tak $x = a^{i'}b\alpha ba^{k'}$. Pre x teda platí (ii) s $i = i'$, $j = 0$ a $k = k'$.
   (ii) Nech $y = a^{i'}ba^{j'}\alpha ba^{k'}$, kde $i', j', k' \in \mathbb{N}$ a $i' \leq k'$. Keďže $y \Rightarrow x$, musí slovo x vzniknúť zo slova y použitím niektorého z pravidiel na neterminál α (jediný neterminál v y).
   Ak ide o pravidlo $\alpha \to a\alpha$, tak $x = a^{i'}ba^{j'}a\alpha ba^{k'} = a^{i'}ba^{j'+1}\alpha ba^{k'}$. Pre x teda platí (ii) s $i = i'$, $j = j' + 1$ a $k = k'$.
   Ak ide o $\alpha \to \varepsilon$, tak $x = a^{i'}ba^{j'}ba^{k'}$. Pre x teda platí (iii) s $i = i'$, $j = j'$ a $k = k'$.
   (iii) Nech $y = a^{i'}ba^{j'}ba^{k'}$, kde $i', j', k' \in \mathbb{N}$ a $i' \leq k'$. Slovo y neobsahuje žiaden neterminál, zároveň by však malo platiť $y \Rightarrow x$. Tento prípad teda nemôže nastať.

$\supseteq$: Nech $x \in (N \cup T)^*$. Dokážeme, že ak pre slovo x platí niektorá z podmienok (i) až (iii), tak $\sigma \Rightarrow^* x$. Postupne pre jednotlivé podmienky (i) až (iii).

(i) Nech je pre x splnená podmienka (i), čiže $x = a^i\sigma a^k$, kde $i, k \in \mathbb{N}$ a $i \leq k$. Dokážeme, že $\sigma \Rightarrow^* x$. Indukciou vzhľadom na $k - i$.

1. Nech $k - i = 0$, čiže $i = k$. Indukciou vzhľadom na túto spoločnú hodnotu dokážeme, že $\sigma \Rightarrow^* a^i\sigma a^k$.
   1.1. Ak $i = k = 0$, máme $x = \sigma$, pričom zrejme $\sigma \Rightarrow^* \sigma$.
   1.2. Nech tvrdenie platí pre $i = k = s$. Ukážeme, že platí aj pre $i = k = s + 1$. Skutočne: nech $x = a^{s+1}\sigma a^{s+1}$. Z indukčného predpokladu máme $\sigma \Rightarrow^* a^s\sigma a^s$, pričom toto odvodenie možno použitím pravidla $\sigma \to a\sigma a$ predĺžiť na $\sigma \Rightarrow^* a^s\sigma a^s \Rightarrow a^sa\sigma aa^s = a^{s+1}\sigma a^{s+1} = x$.
2. Nech tvrdenie platí pre $k - i = r$. Ukážeme, že platí aj pre $k - i = r + 1$.
   Nech $x = a^s\sigma a^{s+r+1}$ pre nejaké $s \in \mathbb{N}$. Indukčný predpoklad hovorí o existencii odvodenia $\sigma \Rightarrow^* a^s\sigma a^{s+r}$. Použitím pravidla $\sigma \to \sigma a$ potom môžeme toto odvodenie predĺžiť na $\sigma \Rightarrow^* a^s\sigma a^{s+r} \Rightarrow a^s\sigma aa^{s+r} = a^s\sigma a^{s+r+1} = x$.

(ii) Nech je pre x splnená podmienka (ii), čiže $x = a^iba^j\alpha ba^k$, kde $i, j, k \in \mathbb{N}$ a $i \leq k$. Indukciou vzhľadom na j dokážeme, že platí $\sigma \Rightarrow^* x$.

1. Nech $j = 0$. Potom $x = a^ib\alpha ba^k$, kde $i, k \in \mathbb{N}$ a $i \leq k$. Podľa tvrdenia dokázaného pre (i) existuje odvodenie $\sigma \Rightarrow^* a^i\sigma a^k$, ktoré možno použitím pravidla $\sigma \to b\alpha b$ predĺžiť na $\sigma \Rightarrow^* a^i\sigma a^k \Rightarrow a^ib\alpha ba^k = x$.
2. Nech tvrdenie platí pre $j = s$. Ukážeme, že platí aj pre $j = s + 1$.
   Nech $x = a^iba^{s+1}\alpha ba^k$. Z indukčného predpokladu vyplýva, že existuje odvodenie $\sigma \Rightarrow^* a^iba^s\alpha ba^k$, ktoré môžeme použitím pravidla $\alpha \to a\alpha$ predĺžiť na $\sigma \Rightarrow^* a^iba^s\alpha ba^k \Rightarrow a^iba^sa\alpha ba^k = a^iba^{s+1}\alpha ba^k = x$.

(iii) Nech je pre x splnená podmienka (iii), čiže $x = a^iba^jba^k$, kde $i, j, k \in \mathbb{N}$ a $i \leq k$. Tvrdenie dokázané pre (ii) potom zaručuje existenciu odvodenia $\sigma \Rightarrow^* a^iba^j\alpha ba^k$, ktoré možno použitím pravidla $\alpha \to \varepsilon$ predĺžiť na $\sigma \Rightarrow^* a^iba^j\alpha ba^k \Rightarrow a^iba^jba^k = x$.

Tvrdenie je dokázané. $\square$

Úloha 4 (Prémia)**.** Nech $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ sú jazyky. *Pravý kvocient* jazyka L_1 jazykom L_2 je jazyk

$$L_1/L_2 = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L_2 : uv \in L_1\}.$$

Do jazyka L_1/L_2 teda patria všetky slová u nad abecedou Σ, pre ktoré existuje slovo v z jazyka L_2 tak, že uv patrí do jazyka L_1.

Nech sú L_1, L_2, L_3 ľubovoľné jazyky. Porovnajte jazyky $(L_1 \cap L_2)/L_3$ a $(L_1/L_3) \cap (L_2/L_3)$.

Riešenie. Dokážeme, že $(L_1 \cap L_2)/L_3 \subseteq (L_1/L_3) \cap (L_2/L_3)$, kým opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí.

$\subseteq$: Nech $u \in (L_1 \cap L_2)/L_3$. Potom existuje $v \in L_3$ také, že $uv \in L_1 \cap L_2$ – preto $uv \in L_1$ a zároveň $uv \in L_2$. Keďže $uv \in L_1$, nutne $u \in L_1/L_3$ a keďže $uv \in L_2$, nutne $u \in L_2/L_3$. Môžeme teda uzavrieť, že $u \in (L_1/L_3) \cap (L_2/L_3)$.

$\not\supseteq$: Nech $L_1 = \{ab\}$, $L_2 = \{abb\}$ a $L_3 = \{b, bb\}$. Slovo $u = a$ patrí do L_1/L_3, lebo pre $v = b \in L_3$ platí $uv = ab \in L_1$. Slovo $u = a$ patrí tiež do L_2/L_3, lebo pre $v = bb \in L_3$ platí $uv = abb \in L_2$. V dôsledku toho teda $u = a \in (L_1/L_3) \cap (L_2/L_3)$.

Slovo $u = a$ ale nepatrí do $(L_1 \cap L_2)/L_3$, lebo v takom prípade by muselo existovať $v \in L_3$ také, že $uv \in L_1 \cap L_2 = \emptyset$, čo je očividný spor. $\square$