Riešenia piatej sady bodovaných domácich úloh

3. január 2018

Úloha 1. Skonštruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

Správnosť vašej konštrukcie slovne zdôvodnite.

Riešenie. Pred poriadnou formálnou definícou Turingovho stroja sa zamyslime nad tým, ako by tento stroj mal pracovať. Dobrým nápadom sa javí spraviť toľko, že najprv porovnám prvý symbol s posledným a ak sú rovnaké, tak si poznačím, že tieto symboly sú už porovnané. Následne porovnám druhý s predposledným a tak ďalej, až porovnám symbol tesne pred stredom slova a symbol tesne za stredom slova. Ak všetky porovnávania skončia úspešne, tak vyhlásim akceptáciu. Pri konštrukcii sa taktiež budem musieť dať pozor na slová nepárnej dĺžky, ktoré akceptovať nechcem, aj keby boli palindrómy. V opačnom prípade sa zaseknem. A ako to už býva zvykom, taktiež si budeme musieť dať pozor na ε, ktorý chceme akceptovať. Prejdime k formálnej definíci Turingovho stroja.

Definujeme Turingov stroj $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ kde:

- $K = \{q_0, q_F, q_a, q_b, q_{[a,KONTROLA]}, q_{[b,KONTROLA]}, q_{MOZNO-DOBRE}, q_{NAJDI}, q_{ZOBER}\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{a, b, \overline{a}, \overline{b}, B, \overline{B}\}$
- $F = \{q_F\}$
- prechodová funkcia δ obsahuje práve tieto prechody:
  - $\delta(q_0, B) = (q_F, \overline{B}, 0)$
  - $\forall c \in \Sigma : \delta(q_0, c) = (q_c, \overline{c}, 1)$
  - $\forall c, d \in \Sigma : \delta(q_c, d) = (q_c, d, 1)$
  - $\forall c \in \Sigma : \delta(q_c, B) = (q_{[c,KONTROLA]}, \overline{B}, -1)$
  - $\forall c, d \in \Sigma : \delta(q_c, \overline{d}) = (q_{[c,KONTROLA]}, \overline{d}, -1)$
  - $\forall c \in \Sigma : \delta(q_{[c,KONTROLA]}, c) = (q_{MOZNO-DOBRE}, \overline{c}, -1)$
  - $\forall c \in \Sigma : \delta(q_{MOZNO-DOBRE}, \overline{c}) = (q_F, \overline{c}, 1)$
  - $\forall c \in \Sigma : \delta(q_{MOZNO-DOBRE}, c) = (q_{NAJDI}, c, -1)$
  - $\forall c \in \Sigma : \delta(q_{NAJDI}, c) = (q_{NAJDI}, c, -1)$
  - $\forall c \in \Sigma : \delta(q_{NAJDI}, \overline{c}) = (q_{ZOBER}, \overline{c}, 1)$
  - $\forall c \in \Sigma : \delta(q_{ZOBER}, c) = (q_c, \overline{c}, 1)$

Prečo táto konštrukcia funguje, teda prečo platí $L(A) = L$? Turingov stroj A začne v stave q_0 a ak na vstupe bol ε, teda stroj videl B, tak automaticky akceptuje. Ak bol vstup neprázdny, tak náš stroj si do stavu načíta prvý symbol, ktorý vidí. Teda bude v stave q_a resp. q_b. V tomto stave kráča do prava až pokial nenarazí na B alebo nadčiarknutý symbol. Vtedy vie, že symbol, ktorý je na ľavo od neho je ten, ktorý má porovnať s načítaným symbolom, čo vie spraviť vďaka stavom $q_{[a,KONTROLA]}$ resp. $q_{[b,KONTROLA]}$. Ak uvidí ten symbol, ktorý hľadá, tak ho nadčiarkne a pokračuje v stave $q_{MOZNO-DOBRE}$. Ak uvidí iný symbol, tak sa zasekne (vtedy vieme, že slovo na vstupe nie je nami požadovaného tvaru). Ak sme v stave $q_{MOZNO-DOBRE}$, tak je šanca, že už sme porovnali všetky symboly, ktoré sme porovnať mali a teda môžeme akceptovať. To je vtedy, keď na ľavo od práve skontrolovaného symbolu je nadčiarknutý symbol. Ak v stave $q_{MOZNO-DOBRE}$ uvidí stroj nenadčiarknutý symbol, tak vie, že potrebuje načítať ďalší symbol, ktorý bude porovnávať.

Teda prejde do stavu q_{NAJDI} a kráča doľava až pokial nenarazí na označený symbol. Vtedy vieme, že treba symbol na pravo od toho, ktorý práve vidím, načítať. To budem vedieť spraviť vďaka stavu q_{ZOBER}, z ktorého prejdem do stavu q_a resp. q_b, podľa symbolu, ktorý čítam. A následne opäť prebehne kontrola tak ako sme práve popísali.

Z predošlej argumentácie by malo byť ľahko vidno, že naozaj akceptujem všetky slová z jazyka $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ a taktiež, že na vstupoch, ktoré nie su palindrómy sa zaseknem a teda ich správne neakceptujem. Čo by mohlo ešte robiť problém sú palindromy nepárnej dĺžky, ktoré akceptovať nechceme. Bude tomu naozaj tak? To, že tomu tak naozaj je demonštrujeme na slove *bbabb* Z predošlého by malo byť čitateľovi jasné, že platí $(Bq_0bbabbB) \vdash^* (B\overline{b}\overline{b}q_{MOZNO-DOBRE}a\overline{b}\overline{b}\overline{B}B)$. Ako bude tento výpočet pokračovať? Jednoducho len aplikujeme prechodovú funkciu a vidíme, že platí: $(B\overline{b}\overline{b}q_{MOZNO-DOBRE}a\overline{b}\overline{b}\overline{B}B) \vdash (B\overline{b}q_{NAJDI}\overline{b}a\overline{b}\overline{b}\overline{B}B) \vdash (B\overline{b}\overline{b}q_{ZOBER}a\overline{b}\overline{b}\overline{B}B) \vdash (B\overline{b}\overline{b}\overline{a}q_a\overline{b}\overline{b}\overline{B}B) \vdash (B\overline{b}\overline{b}q_{[a,KONTROLA]}\overline{a}\overline{b}\overline{b}\overline{B}B)$ a v poslednej uvedenej konfigurácii sa zasekneme. Je ľahké nahliadnuť, že na ľubovolnom palindrome nepárnej dĺžky dopadne výpočet analogicky. Teda skutočne platí $L = L(A)$.

□

Úloha 2. Uvažujme rozhodovací problém daný nasledovne:

Vstup: $\langle A\rangle\$w\$\langle q\rangle$ - kde $\langle A\rangle$ je kód deterministického Turingovho stroja A pracujúceho nad vstupnou abecedou $\{0,1\}$, w je slovo nad abecedou $\{0,1\}$ a $\langle q\rangle$ je kód nejakého stavu q stroja A.

Výstup: „Áno“ práve vtedy, keď stroj A pri výpočte na vstupe w použije stav q.

Zistite, či je uvedený problém rozhodnuteľný. Ak nie, je aspoň rekurzívne vyčísliteľný? Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie. Najprv dokážeme, že uvedený problém je rekurzívne vyčísliteľý. Na to nám stačí, aby Turingov stroj, ktorý čiastočne rozhoduje náš problém na vstupe $\langle A\rangle\$w\$\langle q\rangle$ jednoducho simuloval výpočet stroja A na vstupe w pričom vždy pred odsimulovaním kroku skontroluje, či náhodou konfigurácia, v ktorej sa simulácia aktuálne nachádza neobsahuje stav q. Ak ho obsahuje, tak náš Turingov stroj akceptuje. Ľahko vidno, že keď stroj A pri výpočte na vstupe w použije stav q, tak nami definovaný Turingov stroj vstup $\langle A\rangle\$w\$\langle q\rangle$ akceptuje.

Teraz dokážeme, že uvedený problém nie je rozhodnuteľný. Spravíme to redukciou na univerzálny jazyk L_U. Predpokladajme, že uvedený problém je rozhodnuteľný a teda existuje Turingov stroj, ktorý na každom vstupe zastane a rozhoduje uvedený problém. Označme tento Turingov stroj A_{REC}. Za pomoci stroja A_{REC} zostojíme Turingov stroj U_{REC} taký, že U_{REC} zastaví na každom vstupe a akceptuje L_U. Vstupom pre univerzálny problém je kód $\langle A\rangle$ nejakého Turingovho stroja a slovo w, pričom treba rozhodnúť, či $w \in L(A)$. Stroj U_{REC} bude pracovať nasledovne:

1. Na vstupe dostane $\langle A\rangle\$w$, ktorých sémantika je jasná z predošlého.

2. Transformuje kód $\langle A\rangle$ Turingovho stroja A na kód $\langle A_1\rangle$ Turingovho stroja A_1 takého, že platí $L(A) = L(A_1)$ a navyše, Turingov stroj A_1 má iba jeden akceptačný stav, do ktorého keď vojde, tak v ňom zastane. To sa dá spraviť jednoducho tak, že kód $\langle A\rangle$ náš stroj U_{REC} upraví tak, že bude obsahovať nový stav (označme ho q_F), ktorý bude jediný akceptačný stav a kód prechodovej funkcie upraví nasledovne - zmaže všetky prechody, ktoré viedli z akceptačných stavov stroja A a pre každý akceptačný stav stroja A (označme ho q_A) pridá na každý znak pracovnej abecedy (označme ho a) prechod $\delta(q_A, a) = (q_F, a, 0)$. Je očividné, že takto zostrojený kód $\langle A_1\rangle$ Turingovho stroja je naozaj kódom stroja s požadovanými vlastnosťami. Taktiež veríme, že je pre čitateľa zrejmé, že uvedený postup sa dá realizovať algoritmicky.

3. Následne na vstupe $\langle A_1\rangle\$w\$\langle q_F\rangle$ spustí stroj A_{REC}. Ak A_{REC} akceptuje, tak aj U_{REC} akceptuje. Ak A_{REC} neakceptuje, tak aj U_{REC} neakceptuje.

Je zjavné, že nami definovaný U_{REC} zastane na každom vstupe. Ešte ostáva ukázať, že U_{REC} akceptuje L_U. Zamyslime sa trošku hlbšie nad bodom 3 z konštrukcie U_{REC}. Čo znamená, že A_{REC} vstup $\langle A_1 \rangle \$ w \$ \langle q_F \rangle$ akceptuje? Toľko, že stroj A_1 na vstupe w použije stav q_F. Z toho, ako sme podľa bodu 2 zostrojili kód stroja A_1 vidno, že to znamená práve toľko, že stroj A vstup w akceptoval. A čo znamená, že A_{REC} vstup $\langle A_1 \rangle \$ w \$ \langle q_F \rangle$ neakceptuje? Toľko, že stroj A_1 na vstupe w nepoužije stav q_F. Z toho, ako sme podľa bodu 2 zostrojili kód stroja A_1 vidno, že to znamená práve toľko, že stroj A vstup w neakceptoval. Teda vidno, že U_{REC} akceptuje L_U. Teda sme zostrojili Turingov stroj, ktorý na každom vstupe zastane a akceptuje jazyk L_U, čo je ale v spore s tým, že $L_U \notin \mathscr{L}_{REC}$, teda takýto stroj U_{REC} nemôže existovať. Keďže okrem použitia stroja A_{REC} boli všetky kroky v konštrukcii stroja U_{REC} jasne algoritmické, tak stroj A_{REC} nemôže existovať a teda problém uvedený v zadaní nie je rozhodnuteľný.

$\square$