Riešenia štvrtej sady bodovaných domácich úloh

19. decembra 2017

Úloha 1. Definujme operáciu *pravý kvocient* jazykov L_1 a L_2 nasledovne.

$$L_1/L_2 = \{w \in \Sigma_{L_1}^* \mid \exists u \in L_2 : wu \in L_1\}$$

Rozhodnite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na túto operáciu a svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Ukážeme, že trieda $\mathscr{R}$ je uzavretá na túto operáciu. Nech $L_1, L_2 \in \mathscr{R}$. Z toho vyplýva, že existujú DKA $A_1 = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$, $A_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$ také, že $L(A_1) = L_1, L(A_2) = L_2$. Ukážeme, že aj jazyk $L_1/L_2 \in \mathscr{R}$. Aby sme to dokázali, ukážeme, že existuje deterministický konečný automat A taký, že $L(A) = L_1/L_2$.

Tu si všimnime, že sme nepoužili slovo „zostrojíme". Je to tak zámerne, pretože náš dôkaz naozaj nebude konštrukčný (to znamená, že na základe neho sa nebude dať algoritmicky zostrojiť automat A). To nám však nevadí. Totižto na to, aby sme ukázali, že $L_1/L_2 \in \mathscr{R}$, nám stačí ukázať, že automat A existuje.

Pred tým, ako prejdeme k poriadnemu formálnemu dôkazu, sa zamyslime nad tým, čo je našim cieľom. Chceme definovať konečný automat taký, ktorý pre vstup w overí, či existuje slovo $u \in L_2$ také, že $wu \in L_1$. V čom bude spočívať náš problém? Jednak s tým, že u je nejaké slovo, hociaké, akurát musí existovať. A druhak s tým, že keby si slovo u aj nejak „vycucáme z prsta"(čo robiť ale nebudeme), tak stále máme na vstupe iba slovo w a konečný automat si nijak nevie pridať na vstup niečo a to spracovávať. Ako z toho von? Uvedomme si, že čo každopádne vieme spraviť, je nechať automat A_1 prečítať slovo w. Keď to spraví, bude v nejakom zo svojich stavov, nech je to stav p. Dočítali sme slovo w a prirodzene prichádza otázka, či teda má náš automat, ktorý zatiaľ simuloval A_1 akceptovať alebo nie (Prípadne má robiť ešte niečo? Alebo má robiť niečo úplne iné ako simulovať A_1?). Akceptovať má v prípade, že existuje slovo $u \in L_2$ také, že keby ho pridáme na vstup a pokračujeme vo výpočte, tak skončíme v akceptačnom stave automatu A_1. Musíme ale pre potrebu jednoznačnej definície automatu A naozaj nejak magicky „pridávať u na vstup"? V skutočnosti nám stačí, ak spravíme toľko, že ak zmienené u existuje, tak stav p jednoducho prehlásime za akceptačný. A toto spravíme pre každý stav automatu A_1. Uvedomme si, že takáto definíca bude naozaj jednoznačná. Pre každý stav slovo u požadovaných vlastností buď existuje alebo neexistuje. A teda každý stav bude v nami definovanom DKA A jednoznačne buď akceptačný alebo neakceptačný. Poďme formálne.

Definujeme deterministický konečný automat $A = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F)$, kde množina akceptačných stavov $F = \{q \in K_1 \mid \exists u \in L_2, q_{F_1} \in F_1 : (q, u) \vdash_{A_1}^* (q_{F_1}, \varepsilon)\}$. Dokážeme, že $L(A) = L1/L2$.

- $L(A) \subseteq L1/L2$
  Nech $v \in L(A)$. Teda existuje stav $q_F \in F$ taký, že $(q_1, v) \vdash_A^* (q_F, \varepsilon)$. Z definície množiny F nám vyplýva, že existujú $u \in L_2, q_{F_1} \in F_1$ také, že $(q_F, u) \vdash_{A_1}^* (q_{F_1}, \varepsilon)$. Takisto si uvedomme, že automat A má na vlas rovnakú prechodovú fuknciu ako A_1. Z toho a z $(q_1, v) \vdash_A^* (q_F, \varepsilon)$ nám vyplýva, že $(q_1, v) \vdash_{A_1}^* (q_F, \varepsilon)$. Dajúc dokopy predchádzajúce dostávame $(q_1, vu) \vdash_{A_1}^* (q_F, u) \vdash_{A_1}^* (q_{F_1}, \varepsilon)$, čo priamo hovorí toľko, že existuje slovo $u \in L_2$ také, že $vu \in L_1$. Teda $v \in L1/L2$.

- $L(A) \supseteq L1/L2$
  Nech $v \in L1/L2$. Teda existuje slovo $u \in L_2$ také, že $vu \in L_1$. Teda existuje nasledovný akceptačný výpočet automatu A_1 - $(q_1, vu) \vdash_{A_1}^* (q_{F_1}, \varepsilon)$, kde $q_{F_1} \in F_1$. Teda existuje nejaký stav $p \in K_1$ taký, že predošlý výpočet sa dá rozpísať nasledovne - $(q_1, vu) \vdash_{A_1}^* (p, u) \vdash_{A_1}^* (q_{F_1}, \varepsilon)$. Z definíce množiny F a z $(p, u) \vdash_{A_1}^* (q_{F_1}, \varepsilon)$ vyplýva, že $p \in F$. Kedže $(q_1, vu) \vdash_{A_1}^* (p, u)$, tak aj $(q_1, vu) \vdash_A^* (p, u)$ a teda aj $(q_1, v) \vdash_A^* (p, \varepsilon)$. Z predošlého už priamo dostávame $v \in L(A)$.

Ukázali sme, že existuje DKA akceptujúci jazyk $L1/L2$, teda trieda $\mathscr{R}$ je uzavretá na operáciu pravý kvocient.
Otázka na zamyslenie: Kde v dôkaze sme použili fakt, že jazyk L_2 je regulárny? $\square$

Úloha 2. Nech L je jazyk. Definujme operáciu *triplicate* nasledovne.

$$triplicate(L) = \{www \mid w \in L\}$$

Rozhodnite, či je trieda $\mathscr{L}_{CF}$ uzavretá na túto operáciu a svoje tvrdenie dokážte.

Riešenie. Dokážeme, že trieda $\mathscr{L}_{CF}$ nie je na operáciu *triplicate* uzavretá. Nech $L = \{a^n b | n \in \mathbb{N}\}$. Zjavne $L \in \mathscr{L}_{CF}$. Pomocou pumpovacej lemy dokážeme, že $triplicate(L) \notin \mathscr{L}_{CF}$. Označme $L_T = triplicate(L)$. Pred dokazovaním ešte nahliadnime, že $L_T = \{a^n b a^n b a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Predpokladajme, že $L_T \in \mathscr{L}_{CF}$. Nech p, q sú konštanty zodpovedajúce pumpovacej leme. Označme $r = max(p, q)$. Zvoľme $w = a^r b a^r b a^r b$. Zjavne $|w| > p$ a preto existujú slová x, u, y, v, z také, že platí:

(i) $w = xuyvz$

(ii) $|uyv| \leq q$

(iii) $|uv| \geq 1$

(iv) $\forall i \in \mathbb{N} : xu^i yv^i z \in L_T$

Pred tým, ako dotiahneme veci formálne, nahliadnime, čo bude náš cieľ. Vďaka (ii) je ľahké nahliadnuť, že slovo uyv, ktoré je akýmsi „jadrom pumpovania“ nemôže presahovať cez všetky tri „úseky a-čok“. Teda pumpovať budeme vedieť alebo najviac dva „úseky a-čok“ a v tu nastane problém ten, že počty á-čok v pumpovaných úsekoch a nepumpovaných nebudú rovnaké. A nakoľko vždy bude aspoň jeden nepumpovaný úsek, pumpované slovo nebude v L_T. Taktiež sa nám môže stať, že pumpovaná časť bude obsakovať symobol b (a to práve jeden, viac ich obsahovať kvôli (ii) nemôže). V tomto prípade pumpovaním zvýšime počet symbolov b v slove a nakoľko slová z L_T obsahujú vždy práve 3 symboly b, tak aj v tomto prípade pumpované slovo nebude v L_T. Poďme formálne. Rozoberieme nasledovné prípady:

- $\exists k_u, k_y, k_v \in \mathbb{N} : u = a^{k_u},\ y = a^{k_y},\ v = a^{k_v},\ k_u + k_y + k_v \leq r$
  Z (iii) nám vyplýva, že $k_u + k_v \geq 1$. V tomto prípade môžu nastať nasledovné situácie čo sa týka tvaru slov x, z:

  - $\exists k_x, k_z \in \mathbb{N} : x = a^{k_x};\ z = a^{k_z} b a^r b a^r b;\ k_u + k_y + k_v + k_x + k_z = r$
  - $\exists k_x, k_z \in \mathbb{N} : x = a^r b a^{k_x};\ z = a^{k_z} b a^r b;\ k_u + k_y + k_v + k_x + k_z = r$
  - $\exists k_x, k_z \in \mathbb{N} : x = a^r b a^r b a^{k_x};\ z = a^{k_z} b;\ k_u + k_y + k_v + k_x + k_z = r$

  Vo všetkých troch prípadoch pokračuje dôkaz analogicky, preto ho spravíme iba pre prvý prípad. Vďaka (iv) musí platiť $a^{k_x} a^{2k_u} a^{k_y} a^{2k_v} a^{k_z} b a^r b a^r b = a^{r+k_u+k_v} b a^r b a^r b \in L_T$. Nakoľko však $k_u + k_v \geq 1$, tak toto očividne neplatí a v tomto prípade sme našli hľadaný spor.

- $\#_b(uv) = 1$
  V tomto prípade je očividné, že potom $\#_b(xu^2 yv^2 z) = 4$, čo je v spore s tým, že podľa (iv) má platiť $xu^2 yv^2 z \in L_T$, pretože platí $\forall w \in L_T : \#_b(w) = 3$.

- $\#_b(uv) = 0 \wedge \exists k_u, k_y, l_y, k_v \in \mathbb{N} : u = a^{k_u},\ y = a^{k_y} b a^{l_y},\ v = a^{k_v},\ k_u + k_y + l_y + k_v < r$
  Z (iii) nám vyplýva, že $k_u + k_v \geq 1$. V tomto prípade môžu nastať nasledovné situácie čo sa týka tvaru slov x, z :

  - $\exists k_x, k_z \in \mathbb{N} : x = a^{k_x};\ z = a^{k_z} b a^r b;\ k_x + k_u + k_y = r;\ k_z + k_v + l_y = r$
  - $\exists k_x, k_z \in \mathbb{N} : x = a^r b a^{k_x};\ z = a^{k_z} b;\ k_x + k_u + k_y = r;\ k_z + k_v + l_y = r$
    V predošlých dvoch prípadoch dôkaz pokračuje analogicky, preto ho spravíme iba pre prvý prípad. Vďaka (iv) musí platiť $a^{k_x} a^{2k_u} a^{k_y} b a^{l_y} a^{2k_v} a^{k_z} b a^r b = a^{r+k_u} b a^{r+k_v} b a^r b \in L_T$. Nakoľko $k_u + k_v \geq 1$, tak toto očividne neplatí a našli sme hľadaný spor.

– $\exists k_x \in \mathbb{N} : x = a^r b a^r b a^{k_x};\ k_x + k_u + k_y = r;\ l_y = 0;\ k_v = 0;\ z = \varepsilon;$
V tomto prípade vďaka (iv) musí platiť $a^r b a^r b a^{k_x} a^{2k_u} a^{k_y} b = a^r b a^r b a^{r+k_u} b \in L_T$. Nakoľko platí $k_u + k_v \geq 1$ a taktiež $k_v = 0$, tak nutne $k_u \geq 1$. Teda zjavne $a^r b a^r b a^{r+k_u} b \notin L_T$, čo je hľadaný spor.

Nakoľko iné prípady nemôžu nastať a vo všetkých prípadoch sme prišli k sporu, tak nemôže platiť náš predpoklad, že $L_T \in \mathscr{L}_{CF}$. Kedže sme našli jazyk L o ktorom platí $L \in \mathscr{L}_{CF} \wedge \mathit{triplicate}(L) \notin \mathscr{L}_{CF}$, tak sme dokázali, že trieda $\mathscr{L}_{CF}$ nie je uzavretá na operáciu *triplicate*.

$\square$