DU 3 Úloha 2

Tomáš Farský

4. decembra 2018

1 Zadanie

Nech $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zostrojte zásobníkový automat A taký, že platí $L(A) = L^C$. Správnosť vašej konštrukcie poriadne slovne zdôvodnite.

2 Riešenie

2.1 Konštrukcia

CHCEME: $L(A) = L^C$
Nech $L^{'} = L^C$.
Množinu slov, ktoré obsahujú podslová ba, ca, cb nazvime $L^{'}_1$.
Množinu slov, ktoré majú rozdielny počet a a b nazvime $L^{'}_2$.
Množinu slov, ktoré majú rozdielny počet b a c nazvime $L^{'}_3$.
Potom $L^{'} = L^{'}_1 \cap L^{'}_2 \cap L^{'}_3$.

PDA pre $L^{'}_1$ zadefinujeme takto: $A_1 = (K_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_{0_1}, Z_0, F_1)$, kde
$K_1 = \{q_{0_1}, q_{1_1}\}$, $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$, $\Gamma_1 = \{Z_0, a, b, c\}$, $F_1 = \{q_{1_1}\}$,

$\delta_1(q_{0_1}, a, Z_0) = \{(q_{0_1}, a)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, a, a) = \{(q_{0_1}, a)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, b, Z_0) = \{(q_{0_1}, b)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, b, a) = \{(q_{0_1}, b)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, b, b) = \{(q_{0_1}, b)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, c, Z_0) = \{(q_{0_1}, c)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, c, a) = \{(q_{0_1}, c)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, c, b) = \{(q_{0_1}, c)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, c, c) = \{(q_{0_1}, c)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, a, b) = \{(q_{1_1}, a)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, a, c) = \{(q_{1_1}, a)\}$
$\delta_1(q_{0_1}, b, c) = \{(q_{1_1}, b)\}$
$\delta_1(q_{1_1}, r, s) = \{(q_{1_1}, s)\}$ kde $r, s \in \Sigma$

PDA pre $L^{'}_2$ zadefinujeme takto: $A_2 = (K_2, \Sigma_2, \Gamma_2, \delta_2, q_{0_2}, Z_0, F_2)$, kde
$K_2 = \{q_{0_2}, q_{1_2}\}$, $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$, $\Gamma_2 = \{Z_0, a, b, c\}$, $F_2 = \{q_{1_2}\}$,

$\delta_2(q_{0_2}, a, Z_0) = \{(q_{0_2}, Z_0a)\}$
$\delta_2(q_{0_2}, a, a) = \{(q_{0_2}, aa)\}$
$\delta_2(q_{0_2}, a, b) = \{(q_{0_2}, \varepsilon)\}$
$\delta_2(q_{0_2}, b, Z_0) = \{(q_{0_2}, Z_0b)\}$
$\delta_2(q_{0_2}, b, a) = \{(q_{0_2}, \varepsilon)\}$
$\delta_2(q_{0_2}, b, b) = \{(q_{0_2}, bb)\}$
$\delta_2(q_{0_2}, c, Z_0) = \{(q_{0_2}, Z_0)\}$
$\delta_2(q_{0_2}, c, a) = \{(q_{0_2}, a)\}$
$\delta_2(q_{0_2}, c, b) = \{(q_{0_2}, b)\}$
$\delta_2(q_{0_2}, \varepsilon, b) = \{(q_{1_2}, b)\}$
$\delta_2(q_{0_2}, \varepsilon, a) = \{(q_{1_2}, a)\}$

PDA pre $L^{'}_3$ zadefinujeme takto: $A_3 = (K_3, \Sigma_3, \Gamma_3, \delta_3, q_{0_3}, Z_0, F_3)$, kde
$K_3 = \{q_{0_3}, q_{1_3}\}$, $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$, $\Gamma_3 = \{Z_0, a, b, c\}$, $F_3 = \{q_{1_3}\}$,

$\delta_3(q_{0_3}, a, Z_0) = \{(q_{0_3}, Z_0)\}$
$\delta_3(q_{0_3}, a, b) = \{(q_{0_3}, b)\}$
$\delta_3(q_{0_3}, a, c) = \{(q_{0_3}, c)\}$
$\delta_3(q_{0_3}, b, Z_0) = \{(q_{0_3}, Z_0 b)\}$
$\delta_3(q_{0_3}, b, b) = \{(q_{0_3}, bb)\}$
$\delta_3(q_{0_3}, b, c) = \{(q_{0_3}, \varepsilon)\}$
$\delta_3(q_{0_3}, c, Z_0) = \{(q_{0_3}, Z_0 c)\}$
$\delta_3(q_{0_3}, c, b) = \{(q_{0_3}, \varepsilon)\}$
$\delta_3(q_{0_3}, c, c) = \{(q_{0_3}, cc)\}$
$\delta_3(q_{0_3}, \varepsilon, b) = \{(q_{1_3}, b)\}$
$\delta_3(q_{0_3}, \varepsilon, c) = \{(q_{1_3}, c)\}$

A teda PDA pre $L^{'}$ vyzerá takto: $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde
$K = K_1 \cap K_2 \cap K_3$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{Z_0, a, b, c\}$, $F = \{q_{1_1}, q_{1_2}, q_{1_3}\}$,

$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_{0_1}, Z_0), (q_{0_2}, Z_0), (q_{0_3}, Z_0)\}$
$\delta(q, r, s) = \{(p, s)\}$ pre $q \in K_1, r \in \Sigma_1, s \in \Gamma_1$
$\delta(q, r, s) = \{(p, s)\}$ pre $q \in K_2, r \in \Sigma_2, s \in \Gamma_2$
$\delta(q, r, s) = \{(p, s)\}$ pre $q \in K_3, r \in \Sigma_3, s \in \Gamma_3$
Podotýkam, že množiny stavov automatov A_1, A_2 a A_3 su disjunktné.

Ukážeme, že $L(A) = L^C$.

2.2 Zdôvodnenie

$L(A) \supseteq L^C$

CHCEME: Ak $w \in L^C$ tak $w \in L(A)$ (existuje akceptačný výpočet v A).

$L^{'}{}_1$: Každé slovo v tejto množine obsahuje aspoň jedno podslovo, ktoré sa skladá z dvoch písmen, vždy v takej postupnosti, aby takéto podslovo neexistovalo v jazyku L. Takéto podslová sú práve tri: $\{ba, ca, cb\}$.
Automat, ktorý číta takéto slová funguje tak, že číta vstup, do zásobníka si vždy uloží písmeno, ktoré prečítal a teda pre ďalšie písmeno je v zásobníku uložený jeho predchodca. Takto v slove w nájdeme prvý výskyt nášho dvojpísmenového podslova a presunieme sa do akceptačného stavu, kde iba čítame zvyšok slova, ale obsah zásobníka sa už nemení.

$L^{'}{}_2$: Každé slovo v tejto množine obsahuje rôzny počet a a b, čo si môžeme dovoliť "počítať"na celom slove w, pretože slová, ktoré obsahujú písmená v zlom poradí majú akceptačný výpočet v A_1.
Automat, ktorý číta takéto slová vždycky pridáva na zásobník a alebo b a z týchto dvoch práve to, ktoré je na vrchu zásobníka. Ak automat prečíta to druhé (b alebo a), tak sa písmeno zo zásobníka vytiahne. Ked automat prečíta c, tak sa obsah zásobníka nezmení. Do akceptačného stavu sa automat dostane, keď dočítal slovo w a v zásobníku sú ešte nejaké a alebo b navyše.

$L^{'}{}_3$: Analogicky ako $L^{'}{}_2$, ale namiesto a vkladá automat do zásobníka c.

Každé slovo z L^C patrí do aspoň jednej z týchto množín a dobrá víla nám v prvom (epsilonovom) kroku automatu A povie, v ktorom z automatov A_1, A_2, A_3 je na slove w akceptačný výpočet.

$L(A) \subseteq L^C$

CHCEME: Ak $w \in L(A)$ tak $w \in L^C$.

(i) Slovo w má akceptačný výpočet v A_1, z čoho vyplýva, že niekde v slove w sa vyskytujú aspoň raz dve po sebe idúce písmená, ktoré vytvárajú jedno z troch spomínaných podslov: $\{ba, ca, cb\}$. Keďže v jazyku L sa nevyskytujú slová s takýmito podslovami, musia sa tieto slová vyskytovať v jeho komponente L^C.

(ii) Slovo w ma akceptačný výpočet v A_2, z čoho vyplýva, že po prečítaní slova w museli na zásobníku zostať nejaké (aspoň jedno) a alebo b. Z toho vyplýva, že a a b je v slove w rôzny počet a jazyk L neobsahuje slová, ktoré majú rozdielny počet a a b, čiže slovo w sa musí nachádzať v jeho komponente L^C.

(iii) Analogicky ako (ii), ale v slove w je rozdielny počet b a c.

$\square$