Riešenia druhej sady bodovaných domácich úloh

Peter Kostolányi

25. apríla 2017

Úloha 1. Zistite, či sú nasledujúce problémy rozhodnuteľné:

a) Pre ľubovoľnú dvojicu bezkontextových jazykov L_1, L_2 (daných napríklad gramatikami) rozhodnúť, či $L_1 = L_2^*$.

b) Pre ľubovoľnú bezkontextovú gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ a pravidlo $\pi \in P$ rozhodnúť, či existuje odvodenie slova ε v gramatike G, v ktorom sa použije pravidlo π.

c) Pre ľubovoľný bezkontextový jazyk L nad abecedou $\{a, b, \#\}$ (daný napríklad gramatikou) rozhodnúť, či L obsahuje pre aspoň jedno $w \in \{a, b\}^*$ slovo $w\#w\#w$.

d) Pre ľubovoľný zásobníkový automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ (akceptujúci stavom), ľubovoľné $q \in K$ a ľubovoľné prirodzené číslo k rozhodnúť, či existuje akceptačný výpočet automatu A, v ktorom sa aspoň k-krát vyskytuje konfigurácia so stavom q.

e) Pre ľubovoľný zásobníkový automat A (akceptujúci stavom) rozhodnúť, či existuje aspoň jeden akceptačný výpočet automatu A taký, že po prvom kroku výpočtu, v ktorom počet symbolov na zásobníku klesne, už tento počet nikdy nenarastie.

f) Pre ľubovoľný zásobníkový automat A (akceptujúci stavom) rozhodnúť, či na aspoň jednom vstupe w existujú aspoň dva rôzne (nepredĺžiteľné) akceptačné výpočty automatu A, na ktorých konci je na zásobníku zapísané rovnaké slovo.

Svoje tvrdenia dokážte.

Riešenie.

a) Problém *nie je rozhodnuteľný*. V opačnom prípade by bolo možné rozhodovať nerozhodnuteľný problém ekvivalencie bezkontextového jazyka L so Σ^*. Stačilo by totiž vziať $L_1 = L$, $L_2 = \Sigma$ a použiť (hypotetický) algoritmus rozhodujúci problém zo zadania.

b) Problém *je rozhodnuteľný*. Stačí napríklad modifikovať gramatiku G tak, aby namiesto pravidla $\pi = (\xi \to x)$ obsahovala pravidlo $\xi \to cx$, kde c je nejaký *nový* symbol. Nech G' je výsledná gramatika. Ak sa následne štandardnou konštrukciou zostrojí gramatika G'' generujúca jazyk $L(G'') = L(G') \cap \{c\}^+$, zjavne $L(G'') \neq \emptyset$ práve vtedy, keď v G existuje odvodenie slova ε, v ktorom sa použije π. Na rozhodnutie problému zo zadania teda stačí aplikovať štandardný algoritmus na rozhodovanie prázdnosti bezkontextového jazyka.

c) Problém *nie je rozhodnuteľný*. Nech (X, Y) je prípad PKP nad abecedou $\{a, b\}$ s n dlaždicami. Nech $h\colon \{a, b, \#, 1, \ldots, n\}^* \to \{a, b\}^*$ je homomorfizmus daný ako $h(a) = ab^{n-2}$, $h(b) = bab^{n-1}$, $h(\#) = bbab^n$ a $h(i) = b^{i+2}ab^{n-i}$ pre $i = 1, \ldots, n$. Je potom zrejmé, že prípad (X, Y) má riešenie práve vtedy, keď jazyk $h(L_X)\#h(L_X)\#h(L_Y)$ obsahuje slovo typu $w\#w\#w$. Existencia algoritmu rozhodujúceho problém zo zadania teda implikuje existenciu algoritmu rozhodujúceho PKP.

d) Problém *je rozhodnuteľný*. Automat A upravme tak, aby sa pri každom jeho prechode zo stavu p do stavu p' prečítal zo vstupu symbol p'. Nech A' je výsledný automat (jeho vstupná abeceda je K). V prípade $q \neq q_0$ už potom zrejme stačí rozhodnúť, či

$$L(A') \cap \{w \in K^* \mid \#_q(w) \geq k\} \neq \emptyset$$

a v prípade $q = q_0$ stačí rozhodnúť, či

$$L(A') \cap \{w \in K^* \mid \#_q(w) \geq k - 1\} \neq \emptyset.$$

Keďže ale ide o prienik bezkontextového jazyka s regulárnym jazykom, v oboch prípadoch možno algoritmicky skonštruovať bezkontextovú gramatiku generujúcu daný prienik a aplikovať štandardnú procedúru na rozhodovanie prázdnosti.

e) Problém *je rozhodnuteľný.* Automat A upravme tak, aby sa pri každom jeho prechode prečítalo zo vstupu jedno z „písmen“ -1, 0 a 1 podľa toho, či pri jeho použití počet symbolov na zásobníku klesne, ostane nezmenený, resp. stúpne. Nech A' je výsledný automat. Potom už zrejme stačí štandardnou konštrukciou pre prienik s regulárnym jazykom zostrojiť automat akceptujúci jazyk $L(A') \cap \{0,1\}^*\{-1,0\}^*$ a overiť, či je tento jazyk neprázdny.

f) Problém *nie je rozhodnuteľný.* Nech (X, Y) s $X = (x_1, \ldots, x_n)$ a $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ je prípad PKP nad abecedou $\{a, b\}$. Zostrojme k nemu zásobníkový automat A nasledovne: $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde $K = \{q_0, p_1, p_2, r_1, r_2\}$, $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$, $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$, $F = \{p_2, r_2\}$ a

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) &= \{(p_1, Z_0), (r_1, Z_0)\}, \\
\delta(p_1, i, Z_0) &= \{(p_2, x_i)\}, \qquad \forall i \in \Sigma, \\
\delta(p_2, i, c) &= \{(p_2, x_i)\}, \qquad \forall i \in \Sigma, \forall c \in \{a, b\}, \\
\delta(q_1, i, Z_0) &= \{(q_2, y_i)\}, \qquad \forall i \in \Sigma, \\
\delta(q_2, i, c) &= \{(q_2, y_i)\}, \qquad \forall i \in \Sigma, \forall c \in \{a, b\}.
\end{aligned}$$

V automate A potom existuje vstup w s dvoma rôznymi akceptačnými výpočtami končiacimi v konfiguráciách s rovnakým slovom na zásobníku práve vtedy, keď má prípad PKP riešenie.

$\square$