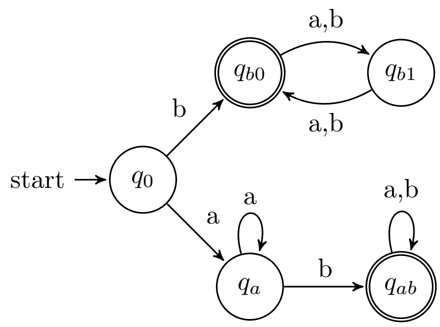
Riešenia druhej sady bodovaných domácich úloh

11. mája 2018

Poznámka na úvod: Tento materiál je neoficiálny. Ak obsahuje chybu, vaše riešenie s rovnakou chybou nie je správne. Ak natrafíte na chybu, cvičiaci bude veľmi vďačný, ak ho na ňu upozorníte.

Úloha 1. Skonštruujte minimálny DKA akceptujúci jazyk $L = \{bw \mid w \in \{a,b\}^*, |w| \equiv 0 \pmod 2\} \cup \{aubv \mid \exists u,v \in \{a,b\}^*\}$. Správnosť vašej konštrukcie slovne zdôvodnite. Minimalitu vášho DKA formálne dokážte.

Riešenie. DKA A taký, že $L(A) = L$ uvádzame pomocou jeho diagramu.



Obr. 1: DKA A

Takto definovaný DKA A prečíta prvý znak zo vstupu. Ak to bolo b, následne v cykle overuje paritu dĺžky zvyšku vstupu. Ak je táto dĺžka párna, A akceptuje. Ak nie je, neakceptuje. Ak bolo prvé na vstupe a, tak A hľadá vo zvyšku vstupu znak b. Ak nájde, akceptuje, ak nenájde neakceptuje. Teda vidno, že skutočne $L(A) = L$.

Poďme dokázať, že takto skonštruovaný DKA je naozaj minimálny DKA pre jazyk L. Jedna cesta, ktorou by sme sa mohli vybrať je, že pracne skonštruujeme 5 množín, o ktorých následne dokážeme, že sú triedami ekvivalencie relácie R_L z Myhill-Nerodeovej vety. To by bolo samozrejme správne, ale ide to aj o trošku jednoduchšie. Uvedomme si, že z Myhill-Nerodeovej vety nám vyplýva, že počet stavov minimálneho DKA pre jazyk L je rovnaký, ako počet tried zmienenej relácie R_L. Aktuálne sa nám podarilo skonštruovať DKA pre jazyk L, ktorý má 5 stavov. Teda nám ostáva už len ukázať, že na menej stavov to nejde. Teda nám stačí ukázať, že nech už triedy ekvivalencie R_L vyzerajú akokoľvek, musí ich byť aspoň 5. To, že ich nemôže byť viac mimochodom už vieme vďaka konštrukcii DKA A. Teda nám stačí nájsť 5 slov taký, že každé z nich bude musieť byť v inej triede ekvivalencie relácie R_L. Z pohľadu na automat A sú nádejnými kandidátmi na týchto 5 slov napríklad $\varepsilon, ba^{10}, ba^{11}, a^{120}, ab^{100}$. To, čo teraz potrebujeme, je pre každú dvojicu (w_1, w_2) týchto slov nájsť slovo $z \in \{a,b\}^*$ také, že $(w_1 z \in L \wedge w_2 z \notin L) \vee (w_1 z \notin L \wedge w_2 z \in L)$. Ak sa nám to podarí, tak dokážeme, že každé z týchto slov musí byť v inej triede ekvivalencie relácie R_L ako zvyšné 4 a teda R_L musí mať aspoň 5 tried ekvivalencie. V nasledujúcom rozbore uvedieme vždy dvojicu slov w_1, w_2 a k nim hľadané z.

- $w_1 = \varepsilon$
  - $w_2 = ba^{10}$ - hľadané $z = \varepsilon$
  - $w_2 = ba^{11}$ - hľadané $z = a$
  - $w_2 = a^{120}$ - hľadané $z = bb$
  - $w_2 = ab^{100}$ - hľadané $z = \varepsilon$

  $w_1 = ba^{10}$

- $w_2 = ba^{11}$ - hľadané $z = \varepsilon$
- $w_2 = a^{120}$ - hľadané $z = \varepsilon$
- $w_2 = ab^{100}$ - hľadané $z = a$

$w_1 = ba^{11}$

- $w_2 = a^{120}$ - hľadané $z = a$
- $w_2 = ab^{100}$ - hľadané $z = \varepsilon$

$w_1 = a^{120}$

- $w_2 = ab^{100}$ - hľadané $z = \varepsilon$

Teda sme ukázali, že relácia R_L musí mať aspoň 5 tried ekvivalencie a teda minimálny DKA akceptujúci L musí mať aspoň 5 stavov. DKA A má 5 stavov a teda je minimálny DKA pre jazyk L.

$\square$

Úloha 2. Poriadne dokážte, že nad 1-písmenovou abecedou je PKP rozhodnuteľný, a že nad 2-písmenovou abecedou je rovnako ťažký ako nad 92-písmenovou abecedou.

Riešenie. Pre potreby tejto úlohy budeme označovať PKP nad $k-$písmenkovou abecedou kPKP.

Najprv dokážeme, že nad 1-písmenkovou abecedou je PKP rozhodnuteľný. Dokážeme nasledujúce pomocné tvrdenie, z ktorého nám všetko potrebné vyplynie.

Lema 1. *Nech $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n)$ je inštancia PKP pričom platí $(\forall 1 \leq i \leq n) : x_i \in \{a\}^* \wedge y_i \in \{a\}^*$. Potom (X, Y) má riešenie práve vtedy, keď $((\exists 1 \leq j \leq n) : |x_j| = |y_j|) \vee ((\exists 1 \leq i, j \leq n) : (|x_j| > |y_j| \wedge |x_i| < |y_i|))$.*

Dôkaz. Najprv neformálne nahliadnime, čo nám tvrdenie vraví a prečo by malo platiť. Tvrdíme toľko, že 1PKP má riešenie práve vtedy, keď existuje domino, ktoré je hore rovnako dlhé ako dole alebo existujú dve dominá také, že jedno je dlhšie hore a druhé dlhšie dole. V prvom prípade bude riešením práve ono domino, ktoré je rovnako dlhé hore aj dole. V druhom prípade bude hľadané riešenie trochu ťažšie popísať slovne tak, aby sa tomu dalo rozumieť, ale pointa bude v tom, že ukladanie domín, ktoré sú hore dlhšie môžme vnímať ako pripočítavanie nejakého čísla do počítadla a prikladanie domín, ktoré sú dlhšie dole môžme vnímať ako odpočítavanie nejakého čísla z toho počítadla. A keď najprv vhodne veľa pripočítame, tak následne budeme vedieť odčítať vhodne veľa tak, aby nakoniec bolo počítadlo 0, čo bude značiť, že hore aj dole máme slovo takej istej dĺžky. Kedže ide o inštanciu 1PKP, tak to znamená že hore aj dole sme dostali rovnaké slová. Ešte ostáva nahliadnuť, že v žiadnom inom prípade riešenie neexistuje. Pokiaľ nie sú splnené podmienky z tvrdenia, tak to znamená že alebo všetky dominá sú hore dlhšie ako dole, alebo sú všetky dominá dole dlhšie ako hore. Nie je ťažké uvedomiť si, že v tom prípade sú všetky nádeje na riešenie márne a riešenie neexistuje.

Poďme teraz formálne.

$\Rightarrow$: Týmto smerom je to ľahko vidno na základe zdôvodnenia vyššie.

$\Leftarrow$: Týmto smerom to nevidno ľahko. Nech teda platí $((\exists 1 \leq j \leq n) : |x_j| = |y_j|) \vee ((\exists 1 \leq i, j \leq n) : (|x_j| > |y_j| \wedge |x_i| < |y_i|))$. Rozoberieme dva prípady:

- Nech $((\exists 1 \leq j \leq n) : |x_j| = |y_j|)$. V tomto prípade ľahko vidno, že napríklad jednoprvková postupnosť (j) je riešením (X, Y).
- Nech $((\exists 1 \leq i, j \leq n) : (|x_j| > |y_j| \wedge |x_i| < |y_i|))$. Kedže ide o inštanciu 1PKP, tak existujú nejaké $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ také, že $x_j = a^{k_1}, y_j = a^{k_2}, x_i = a^{l_1}, y_i = a^{l_2}$. Označme $k = k_1 - k_2, l = l_2 - l_1$. Dokážeme, že riešením je postupnosť $(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{k+l})$ kde $i_1 = \ldots = i_k = i$ a $i_{k+1} = \ldots = i_{k+l} = j$. Potom platí $x_{i_1} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_{k+l}} = a^{kl_1 + lk_1} = a^{(k_1-k_2)l_1 + (l_2-l_1)k_1} = a^{k_1 l_2 - k_2 l_1} = a^{(k_1-k_2)l_2 + (l_2-l_1)k_2} = y_{i_1} \ldots y_{i_k} y_{i_{k+1}} \ldots y_{i_{k+l}}$. Teda definovaná postupnosť je skutočne riešením inštancie 1PKP (X, Y).

$\square$

Teraz zostrojíme Turingov stroj rozhodujúci 1PKP nasledovne:

- V prvom prechode skontroluje, či jeho vstup je naozaj korektný kód inštancie 1PKP. Ak nie je, zasekne sa a neakceptuje. Ak je pokračuje, ďalej.
- V druhom prechode hľadá, či existuje domino, ktoré ma hore rovnaké slovo ako dole. Ak nájde, akceptuje. Ak nenájde, pokračuje ďalej.
- V treťom prechode hľadá, či existujú dominá také, že jedno má hore viac znakov ako dole a druhé má dole viac znakov ako hore. Ak obe nájde, akceptuje. Ak nie, zasekne sa a neakceptuje.

Každému z nás je na základe popisu jasné, ako by sa daný Turingov stroj dal skonštruovať formálne a že sa skutočne skonštruovať dá. Správnosť našej konštrukcie, teda že daný stroj skutočne rozhoduje 1PKP, vyplýva z Lemy dokázanej vyššie.

Teraz dokážeme, že 2PKP je rovnako ťažký ako 92PKP. Pripomíname, že na to, aby sme to dokázali, musíme spraviť redukcie oboma smermi. Dokázať, že 2PKP aj 92PKP sú oba nerozhodnuteľné nie je korektným riešením tejto úlohy.

Nech vieme rozhodovať 92PKP. Na ľubovoľnú inštanciu 2PKP sa vieme dívať aj ako na inštanciu 92PKP, pričom 90 znakov jednoducho nepoužívam. No a čo. Teda ľubovoľnú inštanciu 2PKP viem dať na vstup stroja, ktorý rozhoduje 92PKP bez zmeny. Odpoveď stroja rozhodujúceho 92PKP bude aj odpoveďou nami konštruovaného stroja rozhodujúceho 2PKP.

Nech vieme rozhodovať 2PKP. Teda nech existuje Turingov stroj rozhodujúci 2PKP. Pomocou tohto stroja chceme zostrojiť Turingov stroj rozhodujúci 92PKP. Neformálne spravíme toľko, že každý znak vhodne zakódujeme do núl a jednotiek a takto upravenú inštanciu dáme rozhodnúť stroju rozhodujúcemu 2PKP.

Formálne nech $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n)$ je inštancia 92PKP, ktorá je BUNV nad abecedou $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_{92}\}$.

Definujeme homomorfizmus $h : \Sigma^* \to \{0,1\}^*$ takto: $\forall a_i \in \Sigma : h(a_i) = 0^i 1$.

Inštanciu 2PKP (X_2, Y_2) ekvivalentnú k (X, Y) definujeme nasledovne: $X_2 = (h(x_1), \ldots, h(x_n)), Y_2 = (h(y_1), \ldots, h(y_n))$.

Dokážeme, že (X, Y) má riešenie práve vtedy, keď ho má (X_2, Y_2).

Nech postupnosť indexov $(i_1, \ldots, i_k)$ je riešením inštancie 92PKP (X, Y). Tvrdíme, že $(i_1, \ldots, i_k)$ je taktiež riešením inštancie 2PKP (X_2, Y_2). Kedže $(i_1, \ldots, i_k)$ je riešením (X, Y), tak platí $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$. Kedže h je zobrazenie, tak z toho vyplýva $h(x_{i_1} \ldots x_{i_k}) = h(y_{i_1} \ldots y_{i_k})$. Kedže h je homomorfizmus, tak z toho vyplýva $h(x_{i_1}) \ldots h(x_{i_k}) = h(y_{i_1}) \ldots h(y_{i_k})$. Z toho vyplýva, že $(i_1, \ldots, i_k)$ je taktiež riešením (X_2, Y_2).

Opačne nech postupnosť indexov $(i_1, \ldots, i_k)$ je riešením inštancie 2PKP (X_2, Y_2). Z toho vyplýva $h(x_{i_1}) \ldots h(x_{i_k}) = h(y_{i_1}) \ldots h(y_{i_k})$. Kedže h je homomorfizmus, tak z toho vyplýva $h(x_{i_1} \ldots x_{i_k}) = h(y_{i_1} \ldots y_{i_k})$. Pozor, tu príde dramatická myšlienka. Keďže h je injektívne zobrazenie (iba zobrazenie by nám v tomto momente nestačilo), tak z toho vyplýva $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$. Z toho vyplýva, že $(i_1, \ldots, i_k)$ je taktiež riešením (X, Y).

Turingov stroj rozhodujúci 92PKP pomocou 2PKP zostrojíme nasledovne:

- Najprv stroj overí, či má na vstupe korektný kód inštancie 92PKP. Ak zistí, že nie, zasekne sa a neakceptuje. Ak áno, pokračuje.
- Následne inštanciu 92PKP, ktorú má na vstupe, prevedie na ekvivalentnú inštanciu 2PKP. Na to použije postup popísaný v predošlom. Veríme, že je jasné, že daný postup sa dá realizovať algoritmicky.
- Následne na zostrojenej inštancii 2PKP spustí Turingov stroj rozhodujúci 2PKP a odpovie rovnako ako odpovedal Turingov stroj rozhodujúci 2PKP.

Každému z nás je na základe popisu jasné, ako by sa daný Turingov stroj dal skonštruovať formálne a že sa skutočne skonštruovať dá. Správnosť konštrukcie vyplýva z tvrdení dokázaných vyššie.

Teda sme dokázali, že 2PKP je rovnako ťažký ako 92PKP.

□