Riešenia prvej sady bodovaných domácich úloh

Šimon Sádovský

25. októbra 2017

Úloha 1. Nech L_1, L_2 sú ľubovoľné jazyky. Porovnajte jazyky $(L_1.L_2)^R$ a $L_2^R.L_1^R$.

Riešenie. Dokážeme, že $(L_1.L_2)^R = L_2^R.L_1^R$.

- $\subseteq$: Nech $w \in (L_1.L_2)^R$. Potom $w^R \in L_1.L_2$. Teda existujú slová $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2$ také, že $w^R = u_1u_2$. Teda $(w^R)^R = (u_1u_2)^R$. Je zjavné, že $(w^R)^R = w$ a teda platí $w = u_2^R u_1^R$. Taktiež zjavne $u_1^R \in L_1^R, u_2^R \in L_2^R$. Z predchádzajúceho plynie $w \in L_2^R.L_1^R$.

- $\supseteq$: Nech $w \in L_2^R.L_1^R$. Teda existujú slová $v_1 \in L_1^R, v_2 \in L_2^R$ také, že platí $w = v_2v_1$. Teda existujú slová $u_1 \in L_1, u_2 \in L_2$ také, že $u_1^R = v_1,\ u_2^R = v_2$. Z toho plynie, že $w = u_2^R u_1^R$, teda $w = (u_1u_2)^R$. Zjavne $u_1u_2 \in L_1.L_2$ a teda $w \in (L_1.L_2)^R$ □

Poznámka: Ak sa pozrieme pozorným okom, tak zistíme, že dôkaz druhej inklúzie je v podstate to isté čo dôkaz druhej iba od zadu (až na nejaké detaily technickej povahy). Ak by sme sa trocha posnažili, rovnosť by sa dala dokázať aj sledom ekvivalencií. Takúto techniku ukážeme na 2. úlohe.

Úloha 2. Nech L je ľubovolný jazyk nad abecedou Σ, nech $h : \Gamma^* \to \Sigma^*$ je ľubovoľný homomorfizmus. Porovnajte jazyky $h^{-1}(L^C)$ a $(h^{-1}(L))^C$.
Poznámka: V prípade jazyka L^C sa ako univerzum, vzhľadom na ktoré robíme komplement, berie množina Σ^* a v prípade jazyka $(h^{-1}(L))^C$ sa ako univerzum, vzhľadom na ktoré robíme komplement, berie množina Γ^*.

Riešenie. Dokážeme, že $h^{-1}(L^C) = (h^{-1}(L))^C$. Ako sme sľúbili na konci prvej úlohy, tento krát dokážeme rovnosť sledom ekvivalencií.
$w \in h^{-1}(L^C) \Leftrightarrow h(w) \in L^C \Leftrightarrow h(w) \notin L \Leftrightarrow w \notin h^{-1}(L) \Leftrightarrow w \in (h^{-1}(L))^C$ □