

Sada úloh na cvičenie č. 11

Definície

Operácia „shuffle“ je pre ľubovoľnú dvojicu slov $u, v \in \Sigma^*$ definovaná nasledovne:

$$u \sqcup v = \{u_1v_1u_2v_2 \dots u_nv_n \mid n \geq 1; u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^*; u = u_1 \dots u_n; v = v_1 \dots v_n\}.$$

Symbol $u \sqcup v$ teda označuje *jazyk* všetkých možných „premiešaní“ slov u a v zachovávajúcich relatívne poradie symbolov v slovách u, v : pre ľubovoľné faktorizácie $u = u_1u_2 \dots u_n, v = v_1v_2 \dots v_n$ slov u a v (kde u_1, \dots, u_n a v_1, \dots, v_n sú *slová*) patrí slovo $u_1v_1u_2v_2 \dots u_nv_n$ do jazyka $u \sqcup v$. Niektoré z podslov u_i resp. v_i môžu byť aj prázdne. Napríklad:

$$\begin{aligned}aa \sqcup bb &= \{aabb, abab, baab, abba, baba, bbaa\}, \\abc \sqcup d &= \{abcd, abdc, adbc, dabc\}.\end{aligned}$$

Takúto operáciu na slovách možno prirodzeným spôsobom rozšíriť aj na „shuffle“ jazykov:

$$L_1 \sqcup L_2 = \bigcup_{\substack{u \in L_1 \\ v \in L_2}} u \sqcup v.$$

Do jazyka $L_1 \sqcup L_2$ teda patria všetky možné „premiešania“ slov u a v , kde $u \in L_1$ a $v \in L_2$.

Úlohy

1. Skonstruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}.$$

2. Skonstruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

3. Skonstruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

4. Skonstruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{w^k \mid w \in \{a, b\}^*; k \in \mathbb{N}; k \geq 2\}.$$

5. Skonstruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{a^p \mid p \in \mathbb{N}; p \text{ je prvočíslo}\}.$$

6. Skonstruujte (deterministický alebo nedeterministický) Turingov stroj akceptujúci jazyk

$$L = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}; n \text{ nie je prvočíslo}\}.$$

7. Skonstruujte deterministický Turingov stroj, ktorý na vstupe $a^n \# a^m$, kde $n, m \in \mathbb{N}$ upraví obsah pásky na $a^n \# a^m \# a^{nm}$ a zastaví sa. Stroj môže v prípade potreby zapisovať aj symbol „blank“.

8. Nech $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je nedeterministický konečný automat. Formálne skonstruujte nedeterministický Turingov stroj A' taký, že $L(A') = L(A)$.

9. Nech $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je zásobníkový automat. Formálne skonštruujte nedeterministický Turingov stroj A' taký, že $L(A') = L(A)$.
10. Zistite, či je trieda \mathcal{L}_{RE} uzavretá na operáciu „shuffle“. Svoje tvrdenie dokážte.
11. Nech L je jazyk. Definujme jazyk $\square(L)$ nasledovne:

$$\square(L) = \{ww \mid w \in L\}.$$

Zistite, či je trieda \mathcal{L}_{RE} uzavretá na operáciu \square . Svoje tvrdenie dokážte.