

## SADA ÚLOH NA CVIČENIE 11

---

### Slovo na úvod

Ak sa od vás požaduje dokázať uzavretosť triedy  $\mathcal{L}_{RE}$  na nejaký operáciu, tak sa očakáva, že potrebný Turingov stroj alebo frázovú gramatiku poriadne formálne zostrojíte a správnosť vašej konštrukcie slovne odargumentujete. Takisto sa očakáva, že vaše riešenie bude obsahovať neformálne popísanú hlavnú myšlienku vašej konštrukcie.

### Označenia

Ak píšeme  $bin(n)$ , myslíme tým binárny zápis prirodzeného čísla  $n$ . Ak píšeme  $un(n)$ , myslíme tým unárny zápis prirodzeného čísla  $n$ .

---

1. Dokážte, že trieda  $\mathcal{L}_{RE}$  je uzavretá na operáciu shuffle.
2. Dokážte, že trieda  $\mathcal{L}_{RE}$  je uzavretá na zretáženie.
3. Uvažujme konštrukciu NTS ekvivalentného k frázovej gramatike z prednášky. Ide o NTS, ktorý pre danú frázovú gramatiku  $G$  hľadá odvodenie vstupného slova  $w$  „odzadu“ tak, že obsah pásky reprezentujúci vetnú formu prerobí na predchádzajúcu vetnú formu. Uvažujme frázovú gramatiku  $G$ , ktorá obsahuje pravidlo  $a\beta\beta a \rightarrow \alpha\beta a$ . Uvažujme, že NTS  $A$  je ekvivalentný s gramatikou  $G$  zostrojený konštrukciou z prednášky. Formálne zapíšete časť  $\delta$  – funkcie stroja  $A$ , ktorá zabezpečí, že stroj bude schopný prerobiť vetnú formu  $w_1$ , ktorú má aktuálne na páske, na vetnú formu  $w_2$  takú, že platí  $w_2 \Rightarrow_G w_1$ , pričom  $w_1$  vznikla z  $w_2$  použitím pravidla  $a\beta\beta a \rightarrow \alpha\beta a$ . Inak povedané, stroj  $A$  má vedieť prejsť z konfigurácie  $\overline{B}q_{urob}w_1\overline{B}$  do konfigurácie  $\overline{B}q_{hotovo}w_2\overline{B}$  použivúc iba vami napísané prechody.
4. Nech  $G = (V, E)$  je orientovaný graf, kde
  - $V = \{0, \dots, k\}$
  - $E = \{(v_{1,1}, v_{1,2}), (v_{2,1}, v_{2,2}), \dots, (v_{n,1}, v_{n,2}) \mid (\forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, 2\}) v_{i,j} \in V\}$

Potom kódom grafu myslíme slovo  $bin(v_{1,1})@bin(v_{1,2})\#bin(v_{2,1})@bin(v_{2,2})\#\dots\#bin(v_{n,1})@bin(v_{n,2})$ . Označením  $\langle G \rangle$  myslíme kód grafu  $G$ . Skonstruujte deterministický alebo nedeterministický Turingov stroj, ktorý keď spustíme na vstupe  $bin(v_1)\$bin(v_2)\$\langle G \rangle$ , tak zastane v stave  $q_{OK}$  práve vtedy, keď graf  $G$  obsahuje cestu z vrchola  $v_1$  do vrchola  $v_2$  dĺžky práve 2. Je jedno, ako sa váš stroj bude správať na vstupoch, ktoré nemajú správny formát.

5. Naprogramujte na Turingovom stroji binárny inkrementor. Teda zostrojte deterministický Turingov stroj, ktorý na vstupe dostane binárne zapísané číslo, tento zápis prerobí na binárny zápis čísla o jedna väčšieho a zastane v nejakom špeciálnom stave. Váš Turingov stroj môže v prípade potreby zapisovať symbol „blank“.
6. Uvažujme, for-cykly v tomto tvare:

---

```
for(int i = n; i >= 0; i--)  
{  
    uprav(w);  
}
```

---

Naprogramujte Turingov stroj, ktorý bude simulovať prácu tohto for-cyklu. Teda zostrojte deterministický Turingov stroj taký, ktorý vstup v tvare  $un(n)\#w$  prerobí tak, ako by slovo  $w$  prerobil spomenutý for-cyklus a zastane. Predpokladajte, že subrutínu *uprav* máte zadanú deterministickým Turingovým strojom  $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_A, \{q_{hotovo}\})$ . Turingov stroj  $A$  funguje tak, že vstupnú konfiguráciu  $q_0w$  prerobí na konfiguráciu  $q_{hotovo}uprav(w)$  a zastane. Predpokladajte, že stroj  $A$  použije stav  $q_{hotovo}$  práve raz a to v momente, keď už je všetko hotovo a treba zastať. Taktiež predpokladajte, že pre ľubovoľné slovo  $w$  nad abecedou  $\Sigma$  platí, že slovo  $uprav(w)$  je taktiež nad abecedou  $\Sigma$ .

7. Máme daný NTS  $A = (K_A, \Sigma, \Gamma_A, \delta_A, q_0, F_A)$ . Zostrojte DTS  $B$ , ktorý bude akceptovať slová tvaru  $w\#u$ , kde  $w$  je vstup a  $u$  je zápis konfigurácie stroja  $A$ , ktorá je na danom vstupe dosiahnuteľná. Slovo  $w$  je teda nad abecedou  $\Sigma^*$  a  $u$  je zápis konfigurácie ako slova (teda prvok  $K\mathbf{B}\Gamma_A^* \cup \Gamma_A^*K_A\Gamma_A^+ \cup \Gamma^*K_A\mathbf{B}$  nad abecedou  $K_A \cup \Gamma_A \cup \{\mathbf{B}\}$ , kde  $\mathbf{B}$  označuje blank stroja  $A$ ). Slovné zdôvodnite správnosť vašej konštrukcie. Blank stroja  $A$  môžete v pracovnej abecede stroja  $B$  označiť ako  $\mathbf{B}_A$ .