

Sada úloh na cvičenie č. 10

Definície

Operácia „shuffle“ je pre ľubovoľnú dvojicu slov $u, v \in \Sigma^*$ definovaná nasledovne:

$$u \sqcup v = \{u_1v_1u_2v_2 \dots u_nv_n \mid n \geq 1; u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^*; u = u_1 \dots u_n; v = v_1 \dots v_n\}.$$

Symbol $u \sqcup v$ teda označuje *jazyk* všetkých možných „premiešaní“ slov u a v zachovávajúcich relatívne poradie symbolov v slovách u, v : pre ľubovoľné faktorizácie $u = u_1u_2 \dots u_n, v = v_1v_2 \dots v_n$ slov u a v (kde u_1, \dots, u_n a v_1, \dots, v_n sú *slová*) patrí slovo $u_1v_1u_2v_2 \dots u_nv_n$ do jazyka $u \sqcup v$. Niektoré z podslov u_i resp. v_i môžu byť aj prázdne. Napríklad:

$$\begin{aligned}aa \sqcup bb &= \{aabb, abab, baab, abba, baba, bbaa\}, \\abc \sqcup d &= \{abcd, abdc, adbc, dacb\}.\end{aligned}$$

Takúto operáciu na slovách možno prirodzeným spôsobom rozšíriť aj na „shuffle“ jazykov:

$$L_1 \sqcup L_2 = \bigcup_{\substack{u \in L_1 \\ v \in L_2}} u \sqcup v.$$

Do jazyka $L_1 \sqcup L_2$ teda patria všetky možné „premiešania“ slov u a v , kde $u \in L_1$ a $v \in L_2$.

Úlohy

1. Zostrojte zásobníkový automat A taký, že $L(A) = \{a^i b^j c^k \mid i + j \leq k\}$. Správnosť svojej konštrukcie zdôvodnite.
2. Zostrojte zásobníkový automat A taký, že $N(A) = D_1$, kde D_1 je *Dyckov jazyk prvého rádu*, t.j. jazyk všetkých dobrých uzátvorkovaní nad abecedou $\{(\cdot, \cdot)\}$.¹ Správnosť svojej konštrukcie zdôvodnite.
3. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned}P &= \{\sigma \rightarrow a\sigma\alpha \mid b\beta \mid ab \\ &\quad \alpha \rightarrow \alpha b \mid \alpha\alpha \mid \varepsilon \\ &\quad \beta \rightarrow a\beta b \mid a\}.\end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou zostrojte zásobníkový automat A taký, že $N(A) = L(G)$.

4. Nech $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je zásobníkový automat s $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, c, d\}$, $F = \emptyset$ a prechodovou funkciou δ obsahujúcou nasledujúce prechody:

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a, c) &\ni (q_2, \varepsilon), \\ \delta(q_2, \varepsilon, d) &\ni (q_1, Z_0), \\ \delta(q_1, b, Z_0) &\ni (q_2, ccd).\end{aligned}$$

Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika taká, že $L(G) = N(A)$ – predpokladáme, že G je zostrojená štandardným postupom z prednášky. Nájdite prepisovacie pravidlá gramatiky G zodpovedajúce uvedeným prechodom automatu A .

5. Zistite, či je jazyk $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$ bezkontextový. Svoje tvrdenie dokážte.

¹V riešení je odporúčané zátvorky nahradiť nejakými menej mätúcimi symbolmi, napr. a, b .

6. Zistite, či je jazyk $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}^C$ bezkontextový. Svoje tvrdenie dokážte.
7. Zistite, či je jazyk $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ bezkontextový. Svoje tvrdenie dokážte.
8. Zistite, či je trieda \mathcal{L}_{CF} uzavretá na kladnú iteráciu. Svoje tvrdenie dokážte.
9. Zistite, či je trieda \mathcal{L}_{CF} uzavretá na operáciu „shuffle“. Svoje tvrdenie dokážte.
10. Nech L je jazyk. Definujme jazyk $\text{zrk}(L)$ nasledovne:

$$\text{zrk}(L) = \{ww^R \mid w \in L\}.$$

Zistite, či je trieda \mathcal{L}_{CF} uzavretá na operáciu zrk . Svoje tvrdenie dokážte.