Sada úloh na cvičenie č. 9

Definície

Operácia „*shuffle*“ je pre ľubovoľnú dvojicu slov $u, v \in \Sigma^*$ definovaná nasledovne:

$$u \sqcup\!\sqcup\, v = \{u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots u_n v_n \mid n \geq 1;\ u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma^*;\ u = u_1 \ldots u_n;\ v = v_1 \ldots v_n\}.$$

Symbol $u \sqcup\!\sqcup\, v$ teda označuje *jazyk* všetkých možných „premiešaní“ slov u a v zachovávajúcich relatívne poradie symbolov v slovách u, v: pre ľubovoľné faktorizácie $u = u_1 u_2 \ldots u_n$, $v = v_1 v_2 \ldots v_n$ slov u a v (kde $u_1, \ldots, u_n$ a $v_1, \ldots, v_n$ sú *slová*) patrí slovo $u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots u_n v_n$ do jazyka $u \sqcup\!\sqcup\, v$. Niektoré z podslov u_i resp. v_i môžu byť aj prázdne. Napríklad:

$$aa \sqcup\!\sqcup\, bb = \{aabb, abab, baab, abba, baba, bbaa\},$$
$$abc \sqcup\!\sqcup\, d = \{abcd, abdc, adbc, dabc\}.$$

Takúto operáciu na slovách možno prirodzeným spôsobom rozšíriť aj na „shuffle“ jazykov:

$$L_1 \sqcup\!\sqcup\, L_2 = \bigcup_{\substack{u \in L_1 \\ v \in L_2}} u \sqcup\!\sqcup\, v.$$

Do jazyka $L_1 \sqcup\!\sqcup\, L_2$ teda patria všetky možné „premiešania“ slov u a v, kde $u \in L_1$ a $v \in L_2$.

Pokyny

Ak nie je uvedené inak, všetky tvrdenia je nutné formálne dokázať.

Úlohy

1. Zistite, či je jazyk $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.
2. Zistite, či je jazyk $L = \{ucucv \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.
3. Zistite, či je jazyk $L = \{uuv \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.
4. Zistite, či je jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ regulárny. Svoje tvrdenie dokážte.
5. Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na kladnú iteráciu. Svoje tvrdenie dokážte.
6. Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na operáciu „shuffle“ a svoje tvrdenie dokážte.
7. Nech L je ľubovoľný jazyk. Definujme jazyk $\square(L)$ ako[1]

   $$\square(L) = \{ww \mid w \in L\}.$$

   Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na operáciu $\square$ a svoje tvrdenie dokážte.

8.* Nech L je ľubovoľný jazyk. Definujme jazyk $\sqrt{L}$ ako

   $$\sqrt{L} = \{w \in \Sigma_L^* \mid ww \in L\}.$$

   Zistite, či je trieda $\mathscr{R}$ uzavretá na takto definovanú „odmocninu“ a svoje tvrdenie dokážte.

[1] Jazyk $\square(L)$ vo všeobecnosti *nie je* jazyk L^2.