

## Sada úloh na cvičenie č. 8

### Úlohy

1. Uvažujme rozhodovací problém, kde na vstupe je kód  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$ , o ktorom vopred vieme, že  $L(A) \in \mathcal{L}_{CF}$  a treba rozhodnúť, či  $L(A) = \emptyset$ . Zistite, či je tento problém rozhodnuteľný a svoje tvrdenie dokážte.
2. Dokážte alebo vyvráťte: nech  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{S}'$  sú vlastnosti rekurzívne vyčísliteľných jazykov. Ak  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$  a  $\mathcal{S}$  je rekurzívne vyčísliteľná, tak aj  $\mathcal{S}'$  je rekurzívne vyčísliteľná.
3. Zistite, či platí obdoba prvej Riceovej vety pre *rekurzívne* jazyky. Inak povedané: musí byť každá netriviálna vlastnosť rekurzívnych jazykov nerozhodnuteľná? Ak áno, dokážte. Ak nie, nájdite kontrapríklad.
4. Zistite, či sú nasledujúce problémy rozhodnuteľné alebo aspoň rekurzívne vyčísliteľné:
  - a) Pre kód  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$  určiť, či  $L(A)$  obsahuje aspoň  $10^{1000}$  slov dĺžky deliteľnej  $10^{1000}$ .
  - b) Pre kód  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$  určiť, či  $L(A)$  obsahuje práve  $10^{1000}$  slov dĺžky deliteľnej  $10^{1000}$ .
  - c) Pre kód  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$  určiť, či  $A$  urobí na aspoň jednom vstupe dĺžky deliteľnej  $10^{1000}$  aspoň  $10^{1000}$  krokov.
5. Zistite, či sú nasledujúce problémy rozhodnuteľné alebo aspoň rekurzívne vyčísliteľné:
  - a) Pre kód  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$  určiť, či  $L(A)$  obsahuje aspoň  $10^{1000}$  rôznych slov dĺžky presne  $10^{1000}$ .
  - b) Pre kód  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$  určiť, či  $A$  urobí na aspoň jednom zo slov dĺžky  $10^{1000}$  aspoň  $10^{1000}$  krokov.
  - c) Pre kód  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$  určiť, či  $L(A)$  obsahuje rekurzívne vyčísliteľný podjazyk obsahujúci najviac  $10^{1000}$  slov.
6. Zistite, či sú nasledujúce problémy rozhodnuteľné alebo aspoň rekurzívne vyčísliteľné:
  - a) Pre kód  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$  určiť, či  $L(A) \in \text{DSPACE}(n)$ .
  - b) Pre kód  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$  určiť, či existuje  $L \in \text{DSPACE}(n)$  a homomorfizmus  $h$  tak, že  $L(A) = h(L)$ .
  - c) Pre kód  $\langle A \rangle$  deterministického Turingovho stroja  $A$  určiť, či  $L(A) \in \text{NSPACE}(n) - \text{DSPACE}(n)$ .
7. Nájdite príklad vlastnosti  $\mathcal{S}$  rekurzívne vyčísliteľných jazykov, ktorá nespĺňa žiadnu z troch podmienok druhej Riceovej vety.
- 8.\* Sformalizujte pojem vlastnosti *dvojice rekurzívne vyčísliteľných jazykov* (príkladmi takýchto vlastností by mali byť napr. rovnosť, neprázdnosť prieniku, atď.). Sformulujte a dokážte obdoby Riceových viet, ktoré budú hovoriť o rozhodnuteľnosti resp. rekurzívnej vyčísliteľnosti vlastností dvojíc rekurzívne vyčísliteľných jazykov. Aplikujte dokázané tvrdenia na vyšetrenie rozhodnuteľnosti a rekurzívnej vyčísliteľnosti aspoň jednej konkrétnej vlastnosti.