Sada úloh na cvičenie č. 5

Pokyny

Ak nie je uvedené inak, všetky tvrdenia je nutné formálne dokázať (to sa samozrejme netýka správnosti štandardných postupov známych z prednášky). Úlohy s hviezdičkou sú určené pre náročnejších riešiteľov.

Úlohy

1. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) + \#_b(w) \leq \#_c(w)\}$$

a správnosť svojej konštrukcie dokážte.

2. Nech L je jazyk korektných aritmetických výrazov nad abecedou $\{0, 1, \ldots, 9, +, -, *, /, (,)\}$. Nájdite bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk L. Správnosť konštrukcie zdôvodnite; formálny dôkaz netreba. (Prípadné nejednoznačnosti v zadaní tejto úlohy možno ošetriť ľubovoľne – v takýchto prípadoch svoju voľbu opíšte.)

3. Nájdite bezkontextovú gramatiku G v redukovanom normálnom tvare generujúcu jazyk $L(G) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, pričom:
   a) G je jednoznačná.
   b) G nie je jednoznačná, ale existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $w \in L(G)$ existuje najviac k ľavých krajných odvodení slova w v gramatike G.
   c) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ existuje $w \in L(G)$ také, že existuje aspoň n ľavých krajných odvodení slova w v gramatike G.

   Správnosť tvrdení stačí neformálne zdôvodniť.

4. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to \sigma a \sigma \mid a\alpha \mid \gamma b \mid \varepsilon \\ \alpha &\to a\alpha \mid a\alpha\alpha \mid a\alpha\beta \\ \beta &\to b\beta \mid b \mid \varepsilon \\ \gamma &\to \alpha\alpha \mid b\gamma \mid b\}. \end{aligned}$$

   Štandardnou konštrukciou preveďte gramatiku G do redukovaného normálneho tvaru.

5. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to \alpha a \sigma \mid \beta\beta \mid b \\ \alpha &\to a\sigma \mid \gamma \\ \beta &\to b\gamma\alpha \mid b \mid \varepsilon \\ \gamma &\to a\beta b\sigma \mid aa\}. \end{aligned}$$

   Štandardnou konštrukciou preveďte gramatiku G do „bezepsilonového“ normálneho tvaru.

6. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\to a\alpha\alpha \mid \beta \mid b \\ \alpha &\to a\alpha \mid \beta\gamma \\ \beta &\to \gamma\gamma \mid ab \mid \varepsilon \\ \gamma &\to a\beta a\sigma \mid b\sigma\}. \end{aligned}$$

   Štandardnou konštrukciou preveďte gramatiku G do Chomského normálneho tvaru.

7.* Zistite, či existujú nasledujúce množiny a ak áno, určte ich mohutnosť:

a) Množina všetkých abecied.

b) Množina všetkých jazykov nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.

c) Množina všetkých bezkontextových jazykov nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.

d) Množina všetkých bezkontextových jazykov.

8. Pre účely tejto úlohy budeme hovoriť, že bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ je v ternárnom Chomského normálnom tvare, ak $P \subseteq N \times (N^3 \cup T \cup \{\varepsilon\})$. Formálne dokážte, že skutočne ide o normálny tvar bezkontextových gramatík – teda, že ku každej bezkontextovej gramatike G existuje bezkontextová gramatika G' v ternárnom Chomského normálnom tvare taká, že $L(G') = L(G)$.

9. Hovoríme, že bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$ je bez *reťazových pravidiel* (angl. *chain rules*), ak $P \subseteq N \times ((N \cup T)^* - N)$ – čiže ak gramatika neobsahuje pravidlá typu $\xi \to \eta$, kde $\xi, \eta \in N$. Dokážte, že ku každej bezkontextovej gramatike G existuje bezkontextová gramatika G' bez reťazových pravidiel taká, že $L(G') = L(G)$.