

SADA ÚLOH NA CVIČENIE 4

Definície, Označenia:

Komplement jazyka. Komplement jazyka L , označujeme L^C , definujeme ako $L^C = \Sigma_L^* - L$.

1. Nech $h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ je homomorfizmus. Dokážte nasledovné tvrdenia:

(a) $h(\varepsilon) = \varepsilon$

(b) Pre ľubovoľné $w \in \Sigma^*$ také, že $w = a_1 \dots a_n$ kde $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$ platí $h(w) = h(a_1) \dots h(a_n)$.

2. Zostrojte gramatiku čo najjednoduchšieho typu, ktorá bude generovať práve všetky *binárne* čísla, ktoré sú deliteľné 4. Dokážte správnosť svojej konštrukcie.

3. Daná je bezkontextová gramatika $G = (N, \{a, b\}, P, \sigma)$, kde $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow a\gamma \mid \alpha\sigma\alpha \mid bb \\ & \alpha \rightarrow \alpha\gamma \mid \alpha\alpha\gamma \mid \sigma\varphi\gamma \\ & \beta \rightarrow \delta a \mid \alpha a\beta \\ & \gamma \rightarrow ab \mid \varepsilon \mid \gamma a\gamma b \\ & \delta \rightarrow \beta\beta \mid \sigma a \\ & \varphi \rightarrow \varphi\gamma \mid \alpha \mid \alpha a a a b \\ & \psi \rightarrow \alpha a b \psi \mid \alpha\alpha \mid \psi\}. \end{aligned}$$

Preveďte túto gramatiku do Chomského normálneho tvaru (t.j. tak aby boli pravidlá v tvare $N \times (N^2 \cup T \cup \{\varepsilon\})$) konštrukciou z prednášky, alebo ľubovoľnou inou. Pokiaľ chcete použiť inú konštrukciu, ako tú z prednášky, treba jej korektnosť poriadne dokázať.

4. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}; i = j \vee j = 2k\}$. Dokážte správnosť svojej konštrukcie.

5. Majme dva jazyky.

$$\begin{aligned} L_1 &= \{aau \mid u \in \{a, b\}^*\} \\ L_2 &= \{uab \mid u \in \{a, b\}^*\} \end{aligned}$$

Nájdite bezkontextové gramatiky G_\cap pre jazyk $L_1 \cap L_2$ a G_\cup pre jazyk $L_1 \cup L_2$. Dokážte správnosť svojej konštrukcie.

6. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$ je bezkontextová gramatika s $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \psi\}$, $T = \{a, b\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow \beta a \sigma \mid a \alpha \mid \gamma b \\ & \alpha \rightarrow a \alpha \mid a \alpha \alpha \\ & \beta \rightarrow b \beta \mid b \mid \varepsilon \\ & \gamma \rightarrow \alpha \alpha \mid b \gamma \psi \mid b \mid \gamma \\ & \psi \rightarrow \gamma b \psi\}. \end{aligned}$$

Štandardnou konštrukciou z prednášky preveďte gramatiku G do redukovaného normálneho tvaru. Pokiaľ chcete použiť inú konštrukciu, ako tú z prednášky, treba jej korektnosť poriadne dokázať.

7. Daná je bezkontextová gramatika $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \phi\}$, $T = \{a, b, c\}$ a

$$\begin{aligned}
 P = \{ & \sigma \rightarrow a\gamma\gamma \mid c\beta a\gamma \mid \alpha\beta\gamma \\
 & \alpha \rightarrow \alpha b b \mid \gamma a\beta \mid \varepsilon \\
 & \beta \rightarrow b\beta a \mid \phi\phi \\
 & \gamma \rightarrow a c\beta a \mid c\gamma a \mid \varepsilon \mid \gamma\gamma \\
 & \phi \rightarrow \beta a\gamma \mid c a\gamma c\}.
 \end{aligned}$$

Preveďte túto gramatiku do bezepsilonového normálneho tvaru konštrukciou z prednášky, alebo ľubovoľnou inou. Pokiaľ chcete použiť inú konštrukciu, ako tú z prednášky, treba jej korektnosť poriadne dokázať.

8. Nech $G = (N, T, P, \sigma)$, kde $N = \{\alpha, \beta, \sigma\}$, $T = \{a, b, c\}$ a

$$\begin{aligned}
 P = \{ & \sigma \rightarrow \alpha\beta \\
 & \alpha \rightarrow \varepsilon \mid a\alpha b \mid a\alpha \\
 & \beta \rightarrow \varepsilon \mid b\beta c\}.
 \end{aligned}$$

Nájdite čo najjednoduchší množinový zápis jazyka $L(G)$. Správnosť vášho tvrdenia dokážte. Rozhodnite a dokážte, či je táto gramatika jednoznačná.

9. Gramatika je v *Dereckom normálnom tvare*, ak sú pravidlá podmnožinou $(N \times (NNN \cup TNN \cup \{\varepsilon\}))$. Rozhodnite a dokážte **bez odvolávania sa na normálne tvary z prednášky**, či je tento tvar *normálny*. Inými slovami, rozhodnite a dokážte, či ku každej bezkontextovej gramatike G existuje gramatika G' , ktorá je v Dereckom normálnom tvare a platí $L(G) = L(G')$.
10. **Pre náročnejších:** Nech $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk L^C .