

## SADA ÚLOH NA CVIČENIE 3

**Poznámka pre úlohy minulé, súčasné a hlavne budúce:** Stále očakávame slušné dôkazy vašich tvrdení. Nevylučujeme občasné a uvážené používanie frázy „ľahko vidno“ (prípadne obdobných fráz), avšak veľmi opatrne! Keď ide o konštrukcie, tak pokiaľ nie je uvedené inak, očakáva sa, že konštrukciu spravíte formálne a jej správnosť slovne zdôvodníte. Je veľmi vítané, ak vaše zdôvodnenie myšlienkovito rozdelíte do dvoch inklúzií.

Odmocnina jazyka  $\sqrt{L}$  je definovaná ako  $\{w \mid ww \in L\}$ .

1. Uvažujme 2DKA  $A = (\{p, q, r\}, \{a, b\}, \delta, p, F)$  o ktorého  $\delta$ -funkcii vieme nasledovné:

$$\begin{aligned}\delta(q, a) &= (q, 1) \\ \delta(q, b) &= (r, 1) \\ \delta(p, a) &= (r, -1) \\ \delta(p, b) &= (q, 1) \\ \delta(r, a) &= (p, -1) \\ \delta(r, b) &= (r, -1)\end{aligned}$$

Na prednáške sme videli ako zostrojíte k 2DKA ekvivalentný NKA. Nech  $A'$  vznikol touto konštrukciou.

- a) Platí  $[\vec{r}, \overleftarrow{q}, \vec{r}, \overleftarrow{p}, \vec{q}, \overleftarrow{r}] \in \delta'([\vec{r}, \overleftarrow{r}, \vec{q}, \overleftarrow{r}], b)$ ? Platí  $[\vec{r}, \overleftarrow{p}, \vec{q}, \overleftarrow{q}] \in \delta'([\vec{q}, \overleftarrow{r}, \vec{r}, \overleftarrow{r}], b)$ ?  
 b) Čomu sa rovná  $\delta'([\vec{q}, \overleftarrow{p}, \vec{p}, \overleftarrow{r}], a)$  a  $\delta'([\vec{q}, \overleftarrow{p}, \vec{r}, \overleftarrow{r}], a)$ ?

Vaše odpovede poriadne zdôvodnite.

2. Daný je regulárny jazyk  $L$ . Skonstruujte deterministický dvojsmerný automat pre jazyk  $\sqrt{L}$ .
3. Nech  $i \geq 1$  a nech  $\Sigma_i = \{a_1, a_2, \dots, a_i, b\}$ . Skonstruujte deterministický dvojsmerný konečný automat pre jazyk  $L_i = \{ubv \mid u, v \in (\Sigma_i - \{b\})^*, \exists k \in \{1, \dots, i\} : \#_{a_k}(u) \bmod 7 = \#_{a_k}(v) \bmod 7\}$ . Zamyslite sa nad tým, koľko stavov by potreboval jednosmerný automat v závislosti od  $i$ .
4. Zostrojte LBA pre jazyk  $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$ . Ak označíme dĺžku vstupného slova  $n$ , potom v závislosti od  $n$  a parametrov automatu odhadnite:
- a) počet všetkých konfigurácií vášho automatu.  
 b) počet konfigurácií, ktoré sú vo vašom automate dosiahnuteľné.

Pokúste sa o čo najpresnejšie odhady.

5. Zostrojte LBA, ktorý na vstupe  $w \in a^*$  generuje všetky slová dĺžky  $|w|$  nad abecedou  $\{a, b\}$  v lexikografickom poradí. Po vygenerovaní slova má váš LBA prejsť do nejakého špeciálneho stavu. Z neho potom pokračuje generovaním ďalšieho slova v poradí. V momente, keď váš LBA vygeneruje posledné slovo, prejde do iného špeciálneho stavu a zastane.
6. Zostrojte kontextovú gramatiku generujúcu jazyk  $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
7. **Pre náročnejších** Podľa našej definície je kontextová gramatika taká frázová gramatika, kde pre každé pravidlo  $u \rightarrow v$  navyše platí  $|u| \leq |v|$ . Pôvodná Chomského definícia vyžadovala, aby všetky pravidlá kontextovej gramatiky boli tvaru  $u\xi v \rightarrow u w v$ , kde  $u, v \in (N \cup T)^*$ ,  $\xi \in N$ ,  $w \in (N \cup T)^+$ . Dokážte, že tieto definície sú ekvivalentné pokiaľ ide o triedu jazykov generovaných danými typmi gramatík.