

## SADA ÚLOH NA CVIČENIE 3

---

### Definície:

*Homomorfizmus (slov).* Nech  $h$  je zobrazenie zo  $\Sigma_1^*$  do  $\Sigma_2^*$  (t.j. každé slovo nad  $\Sigma_1$  zobrazí na nejaké slovo nad  $\Sigma_2$ ) také, že  $\forall u, v \in \Sigma_1^*$ ;  $h(u \cdot v) = h(u) \cdot h(v)$ . Potom  $h$  voláme homomorfizmus.

*Homomorfizmus (jazykov).* Nech  $h$  je homomorfizmus, potom obraz jazyka  $L$  ( $L \subseteq \Sigma_1^*$ ) pri zobrazení homomorfizmom  $h$  je jazyk  $h(L) \stackrel{def}{=} \{h(w) \mid w \in L\}$ .

*Inverzný homomorfizmus (jazykov).* Nech  $h$  je homomorfizmus. Inverzným homomorfizmom jazyka  $L$  (označujeme  $h^{-1}(L)$ ), nazývame jazyk  $h^{-1}(L) \stackrel{def}{=} \{w \mid h(w) \in L\}$ . Neformálne môžeme o inverznom homomorfizme jazyka  $L$  uvažovať ako o množine všetkých vzorov, ktoré daný homomorfizmus zobrazí do jazyka  $L$ .

### Pokyny:

Ak nie je v úlohe explicitne uvedené inak, musíte všetky závery formálne dokázať.

Ak úloha znie „Porovnanajte jazyky  $L_1$  a  $L_2$ “, tak sa od vás očakáva, že rozhodnete, či platia obe inklúzie, tj. či platí  $L_1 \subseteq L_2$  a či platí  $L_2 \subseteq L_1$ .

---

1. Nech  $h: \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$  je homomorfizmus daný ako  $h(a) = acb$ ,  $h(b) = b$  a  $h(c) = aa$ . Nech  $L = \{a^n cb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Nájdite jazyky  $h^{-1}(L)$  a  $h(h^{-1}(L))$ .
2. Nech  $L_1, L_2$  sú jazyky,  $h: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  je homomorfizmus a  $\Sigma_{L_1}, \Sigma_{L_2} \subseteq \Sigma$ . Porovnajte jazyky  $h(L_1 \cap L_2)$  a  $h(L_1) \cap h(L_2)$ .
3. Nech  $L_1, L_2$  sú jazyky,  $h: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  je homomorfizmus a  $\Sigma_{L_1}, \Sigma_{L_2} \subseteq \Gamma$ . Porovnajte jazyky  $h^{-1}(L_1 \cup L_2)$  a  $h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$ .
4. Ak  $f: \Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_3^*$ ,  $g: \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  sú homomorfizmy, musí aj ich zloženie (funkcia  $h: \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_3^*$  definovaná tak, že  $(\forall w \in \Sigma_1) h(w) = f(g(w))$ ) byť homomorfizmus? Nech  $f: \Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_3^*$ ,  $g: \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  sú funkcie také, že ich zloženie  $h: \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_3^*$  je homomorfizmus. Musia potom obe funkcie  $f, g$  byť homomorfizmy?
5. Nájdite čo možno najjednoduchší „množinový“ zápis pre jazyk generovaný bezkontextovou gramatikou  $G = (N, T, P, \sigma)$ , kde  $N = \{\sigma, \alpha, \beta\}$ ,  $T = \{a, b, c\}$  a

$$\begin{aligned} P &= \{\sigma \rightarrow b\sigma ba \mid \alpha\beta \\ &\quad \alpha \rightarrow c\alpha \mid \varepsilon \\ &\quad \beta \rightarrow \beta a \mid a\}. \end{aligned}$$

Svoje tvrdenie dokážte.

6. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ . Správnosť svojej konštrukcie dokážte.
7. Zostrojte bezkontextovú gramatiku generujúcu jazyk  $L = \{a^n c^{k+1} d^k b^{2n} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$ . Správnosť svojej konštrukcie dokážte.
8. Zostrojte regulárnu gramatiku generujúcu jazyk  $L = \{vabu \mid v, u \in \{a, b\}^*, \#_a(vu) \equiv 0 \pmod{2}\}$ . Správnosť svojej konštrukcie dokážte.