

SADA ÚLOH NA CVIČENIE 2

Definície:

Mocnina jazyka. $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^1 = L$, $L^{n+1} = L \cdot L^n$.

Uzáver (Kleeneho $*$). $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$, $L^+ = \bigcup_{i > 0} L^i$.

Nech w je slovo. Potom $\#_a(w)$ značí počet výskytov znaku a v slove w .

Pokyny:

Ak nie je v úlohe explicitne uvedené inak, musíte všetky závery formálne dokázať.

Ak úloha znie „Porovnanajte jazyky L_1 a L_2 “, tak sa od vás očakáva, že rozhodnete, či platia obe inklúzie, t.j. či platí $L_1 \subseteq L_2$ a či platí $L_2 \subseteq L_1$.

1. Uvažujme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ a jazyky

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\},$$

$$L_2 = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}.$$

Nájdite¹ jazyk $L_1 \cdot L_2$. Svoje tvrdenie dokážte.

2. Nech L je jazyk. Porovnajate jazyky L^* a $(L^*)^*$.
3. Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajate jazyky $(L_1 \cup L_2)^*$ a $\{\varepsilon\} \cup (L_1 \cup L_2) \cdot L_2^* \cdot (L_1 \cdot L_2^*)^*$.
4. Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajate jazyky $(L_1 \cap L_2)^*$ a $L_1^* \cap L_2^*$.
5. Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajate jazyky $(L_1 \cdot L_2)^*$ a $L_1^* \cdot L_2^*$.
6. Nech L_1, L_2 sú jazyky. Porovnajate jazyky $(L_1 \cap L_2)^R$ a $L_1^R \cap L_2^R$.
7. Nech L je jazyk. Porovnajate jazyky $(L^+)^R$ a $(L^R)^+$.
8. Rozhodnite, či platí:
a) Ak $L = L^*$, tak $L = L^2$
b) Ak $L = L^2$, tak $L = L^*$
9. Definujme odmocninu z jazyka nasledovne: $\sqrt{L} = \{w \mid ww \in L\}$.
a) Nájdite jazyk L taký, že $(\sqrt{L})^2 \neq L$.
b) Nájdite jazyk L taký, že $(\sqrt{L^2}) \neq L$.
10. a) Nech L_1, L_2 sú ľubovoľné jazyky. Dokážte, že ak $aa \in L_1^*$ a $aaa \in L_2^*$, tak jazyk $L_1^* \cap L_2^*$ je nekonečný.

¹Pod „nájdením jazyka“ tu máme na mysli nájdenie čo možno najjednoduchšieho „množinového“ zápisu vyjadrujúceho daný jazyk.