Sada úloh na cvičenie č. 2

Úlohy

1. Nech $L_1 = \{xcy \mid x, y \in \{a,b\}^*;\ |x| = |y|\}$ a $L_2 = \{xcycz \mid x, y, z \in \{a,b\}^*;\ |x| = |y| = |z|\}$. Zostrojte a-prekladač M taký, že $M(L_1) = L_2$ alebo dokážte, že sa to nedá.

2. Nech L_1 a L_2 sú jazyky ako v predchádzajúcej úlohe. Zostrojte a-prekladač M taký, že $M(L_2) = L_1$ alebo dokážte, že sa to nedá.

3. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:
   a) Pre ľubovoľné dva neprázdne jazyky $L_1, L_2 \in \mathscr{R}$ existuje a-prekladač M taký, že $M(L_1) = L_2$.
   b) Pre ľubovoľné dva neprázdne jazyky $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_{CF}$ existuje a-prekladač M taký, že $M(L_1) = L_2$.

4. *1-a-prekladač* je a-prekladač $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$ taký, že $H \subseteq K \times \Sigma_1 \times \Sigma_2^* \times K$. Zistite, či ku každému a-prekladaču existuje ekvivalentný 1-a-prekladač. Zmenila by sa situácia, keby sme požadovali iba $H \subseteq K \times (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma_2^* \times K$?

5.* Nech $M_1 = (K_1, \Sigma_1, \Sigma_2, H_1, q_{0,1}, F_1)$ a $M_2 = (K_2, \Sigma_2, \Sigma_3, H_2, q_{0,2}, F_2)$ sú a-prekladače. Dokážte, že existuje a-prekladač $M_2 \circ M_1$ (alebo pri inej notačnej konvencii $M_1 M_2$) taký, že pre všetky $L \subseteq \Sigma_1^*$ platí $M_2 \circ M_1(L) = M_2(M_1(L))$.

6. Zistite, či existuje a-prekladač M taký, že pre ľubovoľný jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ platí $M(L) = L^C$. Svoje tvrdenie dokážte.

7. Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je *lokálny*, ak existujú množiny $Z, K \subseteq \Sigma$ a $S \subseteq \Sigma^2$ tak, že

$$L = (Z\Sigma^* \cap \Sigma^* K) - (\Sigma^* S \Sigma^*).$$

   Inak povedané, jazyk L je lokálny, ak existujú Z, K, S tak, že L je jazyk práve všetkých neprázdnych slov, ktorých prvé písmeno patrí do Z, posledné písmeno patrí do K a žiadna dvojica po sebe idúcich písmen nepatrí do S.[1]
   a) Dokážte, že každý lokálny jazyk je regulárny.
   b) Nájdite príklad regulárneho jazyka, ktorý nie je lokálny.
   c) Dokážte, že jazyk akceptačných výpočtov a-prekladača je vždy lokálny.

8. Nájdite abecedy Σ, Γ a zobrazenie $\tau\colon \Sigma^* \to 2^{\Gamma^*}$ také, že pre všetky $u, v \in \Sigma^*$ je splnená podmienka $\tau(uv) = \tau(u)\tau(v)$, ale τ *nie je* substitúcia. Inými slovami, dokážte, že podmienka $\tau(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ je v definícii substitúcie skutočne podstatná.

9. Zistite, či ku každej regulárnej substitúcii τ existuje a-prekladač M_τ taký, že pre ľubovoľný jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ platí $M_\tau(L) = \tau(L)$. Svoje tvrdenie dokážte.

---

[1] Ekvivalentne by bolo možné uvažovať množinu S^C, do ktorej naopak každá dvojica po sebe idúcich písmen patriť musí.