

1 (True or False) and Justify

[20 bodov]

O každom tvrdení uveďte, či je pravdivé, a svoj názor stručne (ideálne 1 veta, max 3) zdôvodnite.

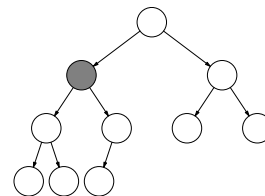
1. Mergesort deliaci pole na $1/3$ a $2/3$ má aj v najhoršom možnom prípade časovú zložitosť $\Theta(n \log n)$.
2. Pomocou vyvaž. binárneho stromu vieme efektívne implementovať abstraktnú dátovú štruktúru „prioritná fronta“.
3. Pomocou binárnej haldy vieme efektívne implementovať abstraktnú dátovú štruktúru „usporiadaná množina“.
4. Máme dve n -prvkové polia. V čase $O(n \log n)$ vieme zistiť, či je jedno permutáciou druhého.
5. Existuje implementácia zásobníku, pri ktorej veľkosť nie je vopred obmedzená (inak ako množstvom dostupnej pamäte) a „push“ aj „pop“ majú zaručene konštantnú (t.j. nie len amortizovane konštantnú) časovú zložitosť.
6. Máme usporiadané pole obsahujúce k^3 prvkov. Zistiť, či sa v ňom nachádza prvok x , vieme v čase $O(\log k)$.
7. Na vygenerovanie všetkých podmnožín danej n -prvkovej množiny treba čas $\Omega(n!)$.
8. $\Theta(n \log n) \subseteq O(n^2)$.

2 Pohľad zvnútra: halda

[5+5 bodov]

Na obrázku je binárna halda s maximom v koreni. Sú v nej uložené čísla 1 až 10.

- a) Doplňte čísla do haldy tak, aby vyfarbené pole malo čo najväčšie číslo.
 - b) Doplňte čísla do haldy tak, aby vyfarbené pole malo čo najmenšie číslo.
- Stručne zdôvodnite, prečo tam väčšie ani menšie číslo od tých vašich byť nemôže.



3 Pohľad zvnútra: najdrahší prvok

[2+8 bodov]

Budeme sa hrať nasledovnú hru. Mám pole a v ňom n rôzne drahých vecí, očíslovaných od 0 do $n - 1$. V každom kole hry mi povieť dve rôzne čísla vecí a ja vám poviem, ktorá z nich je drahšia. Cieľom hry je nájsť najdrahšiu vec. Príklad: Mám veci s cenami (10, 47, 1, 2, 42). Opýtate sa na veci číslo 0 a 3. Odpoviem: drahšia je vec číslo 0.

- a) Napíšte program, ktorý bude hrať túto hru a v najhoršom prípade položí najmenší možný počet otázok.
- b) Dokážte, že program, ktorý ste napísali, má požadovanú vlastnosť.

4 Pohľad zvnútra: binárny strom

[20 bodov]

Napíšte (nejaký, čím efektívnejší, tým lepšie) algoritmus, ktorý k danému vrcholu binárneho vyhľadávacieho stromu nájde vrchol s nasledujúcou väčšou hodnotou. Inými slovami, napíšte (do detailov) program, ktorý sa spustí vždy, keď inkrementujem iterátor ukazujúci na prvok v sete. (Vstupom je ukazovateľ na vrchol v strome, návratovou hodnotou je ukazovateľ na iný vrchol. Detaily uloženia stromu v pamäti si vhodne zvolte.)

5 Pohľad zvonka: identifikátory

[15 bodov]

Na vstupe je postupnosť n objektov; každý objekt je nejaký b -bitový reťazec. Dva objekty považujeme za rovnaké len ak sa presne rovnajú ich bitové reprezentácie. Objektom by sme chceli priradiť identifikátory od 0 po $k - 1$, kde k je počet rôznych objektov na vstupe. Napíšte čo najefektívnejší program, ktorý načíta dotýčnych n objektov, priradí im identifikátory a vypíše postupnosť n identifikátorov zodpovedajúcu vstupu. Odhadnite jeho časovú zložitosť.

Príklad: pre vstup Jaro, Zuza, Jaro, Fero je jedným z možných výstupov postupnosť 1, 0, 1, 2.

6 Pohľad zvonka: lyžovačka

[5 × 5 bodov]

Máme kopec. Na kopci je n význačných bodov, očíslovaných od 0 po $n - 1$. Vyššie číslo = vyššia nadmorská výška. Bod 0 je spodok a $n - 1$ je vrch vleku. Medzi niektorými dvojicami bodov vedú zjazdovky, a to vždy zhora dole. Po zjazdovkách sa odváďať dá dostať do 0. Naším cieľom je zistiť dĺžku najdlhšej postupnosti zjazdoviek vedúcej z bodu $n - 1$ do bodu 0.

Na vstupe je dané dvojrozmerné pole D . Hodnota $D[i][j]$ je buď dĺžka zjazdovky idúcej z i do j , alebo 0 ak taká zjazdovka neexistuje.

- a) Uvažujme jednoduchý pažravý algoritmus: ak stojím v bode, z ktorého ide ďalej viacero zjazdoviek, vyberiem si vždy najdlhšiu z nich. Dokážte alebo vyvráťte správnosť tohto algoritmu.
- b) Napíšte rekurzívnu funkciu, ktorá náš problém vyrieši tak, že bude postupne skúšať všetky možné spôsoby, ako ísť z bodu $n - 1$ do bodu 0. Odhadnite zhora časovú zložitosť tohto riešenia.
- c) Vhodne pridajte do riešenia podúlohy b memoizáciu. Odhadnite zhora časovú zložitosť takto vylepšeného riešenia. (Hint: už pri riešení podúlohy b sa oplatí myslieť na to, že následne bude treba riešiť túto podúlohu.)
- d) Prepíšte riešenie podúlohy c na dynamické programovanie (t.j. ekvivalentné iteratívne riešenie nepoužívajúce rekurziu).
- e) Popíšte, ako upraviť algoritmus z podúlohy c alebo d tak, aby sme nielen zistili maximálnu možnú celkovú dĺžku, ale aj vedeli efektívne zostrojiť (jednu možnú) optimálnu postupnosť zjazdoviek.

7 Ťažšie bonusové úlohy

B1 (10 bodov) Keby sme v úlohe 3 chceli nájsť aj najlacnejšiu aj najdrahšiu vec, koľko najmenej otázok nám zaručene stačí?

B2 (6 bodov) V úlohe 6 uvažujme zložitejší pažravý algoritmus: Jednotkovou cenou zjazdovky z i do j nazveme hodnotu $D[i][j]/(i - j)$. Ak stojím v bode, z ktorého ide ďalej viacero zjazdoviek, vyberiem si tú s najväčšou jednotkovou cenou. Dokážte alebo vyvráťte správnosť tohto algoritmu.

B3 (4 body) V úlohe 6 predpokladajme, že namiesto poľa D je na vstupe zoznam jednotlivých zjazdoviek. Počet zjazdoviek označme m a predpokladajme, že m je rádovo menšie ako n^2 . Navrhните čo najlepšiu dátovú štruktúru na ich uloženie a povedzte, ako sa jej použitie prejaví na časovej a pamäťovej zložitosti riešenia podúloh 6c a 6d.