2. Pažravé algoritmy

Niektoré typy algoritmických príkladov môžeme riešiť pažravou metódou. Túto metódu postupne objavíme riešením príkladov tohto typu.

2.1 Úloha o zlate

Zadanie 14	Veštica Teodora, ktorá sa nikdy nemýli, nám predpovedala, ako sa bude vyvíjať cena zlata v nasledujúcich dňoch. Ako s ním obchodovať, aby sme si čo najviac zarobili?

Skúste si napríklad ručne vyriešiť nasledovný prípad:

Máme v hotovosti **300** eur. Dnešná cena zlata je **34** eur za gram. V nasledujúcich dňoch sa táto cena bude meniť nasledovne: zajtra **32** eur/g, pozajtra **30** eur/g, v ďalších dňoch to bude postupne **35**, **33**, **32**, **38**, **40** a **37** eur/g.

Viete mať na konci posledného dňa **400** eur? A dá sa dosiahnuť ešte viac?

Nebojte sa vyskúšať možnosti. Skúšanie pomáha nachádzať protipríklady a princípy, o ktoré sa v dôkazoch opierame.

Riešenie zadania 14	Optimálne riešenie vyzerá nasledovne: Počkáme, kým cena klesne na 30 eur za gram. Vtedy nakúpime za všetky peniaze 10 gramov zlata. Na druhý deň ho zase všetko predáme, takže budeme mať 350 eur. Znova počkáme, kým cena klesne na 32 eur/g. Vtedy nakúpime zlato, budeme ho mať zhruba 10.9 gramu. Počkáme si na cenu 40 eur/g a všetko zlato predáme, čím dostaneme výslednú sumu 437.5 eura.

Všimnime si, že v našej stratégii na riešenie úlohy sa striedajú dva kroky: počkáme na lacné zlato a nakúpime; počkáme na drahé zlato a predáme. Ako ale exaktne definovať, čo je „lacné zlato , a teda kedy nakupovať a kedy predávať?

Vo všeobecnosti sa algoritmus na nájdenie optimálneho zárobku dá sformulovať až prekvapujúco jednoducho. Všimnime si, že každú noc sa nejak zmení cena zlata. Ak

narastie, chceme tú noc vlastniť zlato, aby sme rastom ceny zarobili. Ak klesne, chceme tú noc vlastniť peniaze, aby sme neprerobili.

Takto sa teda každý večer môžeme pažravo rozhodnúť, či chceme zlato alebo peniaze, a podľa toho nakúpiť alebo predať.

V tejto jednoduchej úlohe sme sa teda stretli so situáciou, kedy sme ***globálne optimálne*** riešenie zostrojili tak, že sme postupne urobili niekoľko ***lokálne optimálnych rozhodnutí***. (K najvyššiemu záverečnému kapitálu sme sa dopracovali tak, že sme každý deň zodpovedali otázku: „Čo spraviť, aby som mal zajtra čo najviac peňazí?)

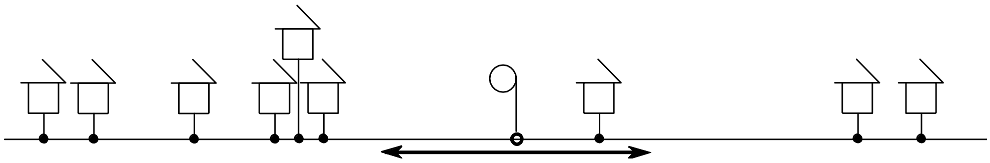
Ako neskôr uvidíme, pažravý prístup k riešeniu úlohy sa síce dá často použiť, ale zďaleka nie vo všetkých situáciách musí viesť k optimálnemu riešeniu. Skôr, než sa dostaneme k takýmto úlohám, si však ukážeme ešte jednu, pri ktorej sa pažravý prístup bude dať použiť.

2.2 Úloha o zastávkach autobusu

Mnohé naše obce sú postavené pozdĺž ciest, častokrát sa okolo nich tiahnu celé kilometre. Napríklad Kolárovice v okrese Bytča majú dĺžku okolo 10 km. V tejto úlohe budeme do takejto obce rozmiestňovať autobusové zastávky.

Zadanie 15	V obci stojí niekoľko domov. Všetky stoja pri jedinej rovnej ceste, ktorá cez obec prechádza. O každom dome vieme, na koľkom metri cesty od začiatku obce má bránu. Našou úlohou je rozmiestniť na ceste čo najmenej autobusových zastávok tak, aby sme nimi pokryli celú obec. Presnejšie, zastávky musia byť umiestnené tak, aby to nik nemal z domu na zastávku ďalej ako 500 metrov.

Príklad: V Kocúrkove stoja domy na nasledujúcich súradniciach: 100, 250, 600, 1000, 1100, 1200, 2300, 3300 a 3450 metrov od začiatku obce. Nájdite ručne čo najlepšie rozmiestnenie zastávok. Situáciu si môžeme znázorniť nasledovne:



Začiatok obce je vľavo. Na obrázku je znázornené aj jedno možné umiestnenie zastávky, je tam však len kvôli znázorneniu jej dosahu – teda vy ju na danom mieste použiť nemusíte.

Optimálne riešenie je postaviť štyri zastávky. Existuje veľa spôsobov, ako to spraviť: napríklad budeme mať zastávky na súradniciach 300 (sem budú chodiť z prvých troch domov), 1100 (štvrtý až šiesty dom), 2800 (siedmy a ôsmy dom) a 3350 (posledný dom).

Iné, rovnako dobré riešenie, je postaviť zastávky na súradniciach 600, 1200, 2300 a 3333. Ako ale dokázať, že nám na túto obec nestačia tri zastávky? Jeden možný argument môže vyzerať nasledovne:

Všimnime si prvý a šiesty dom. Ich vzdialenosť je 1100 metrov, čo je viac ako dĺžka úseku obsluhovaného jednou zastávkou. Preto nech by sme akokoľvek umiestnili zastávku, ktorá obsluhuje prvý dom, nikdy nebude stačiť na obslúženie šiesteho. (Presnejšie, vieme ňou obslúžiť nanajvýš prvých 5 domov, a to tak, že ju postavíme na súradnici 600.)

Analogicky sa môžeme pozrieť na šiesty a siedmy dom, opäť vidíme, že ich vzdialenosť je priveľká na pokrytie tou istou zastávkou. A pre siedmy a deviaty dom je situácia rovnaká. Na to, aby sme obslúžili domy s číslami 1, 6, 7 a 9, teda určite musíme použiť štyri rôzne zastávky.

Ako teda sformulovať všeobecný algoritmus, ktorý bude túto úlohu riešiť a vždy nájde optimálne riešenie? Náznak správnej úvahy sme už spravili vo vyššie uvedenom dôkaze.

Všimnime si prvý dom v obci. Ten musí mať určite vo svojom okolí nejakú zastávku. Kam ju umiestniť? Zjavne najlepšie spravíme, ak ju dáme najďalej ako to ide – teda 500 metrov za prvý dom. Totiž ak by sme ju posunuli z tejto polohy kamkoľvek bližšie k začiatku obce, žiadne nové domy nám do intervalu, ktorý zastávka obsluhuje, nepribudnú – pred prvým domom žiadne iné nie sú. Ale naopak, pre nejaké iné domy by už posunutá zastávka mohla byť priďaleko. Jej posunutím teda nemáme čo získať, môžeme len stratiť.

Výborne, umiestnili sme prvú zastávku, čo teraz ďalej? V tejto chvíli môžeme zabudnúť na všetky domy, ktoré táto zastávka obslúžila – akoby v obci ani neboli. A dostávame opäť presne tú istú úlohu ako na začiatku: zvyšné domy treba pokryť čo najmenej zastávkami.

Optimálne riešenie teda vieme zostrojiť tak, že dokola opakujeme nasledujúce kroky:

1. Nájdeme prvý dom v obci, ktorý ešte pri sebe nemá zastávku.
2. Postavíme zastávku 500 metrov zaň.

Podľa tohto algoritmu sa dá napísať počítačový program, ktorý optimálne rozmiestnenie zastávok nájde v čase lineárnom od počtu domov (za predpokladu, že na vstupe ich už dostaneme usporiadané). Stačí totiž spracúvať domy v poradí, v akom by sme ich stretli pri prechode obcou a počas toho si pamätať, kde sme postavili doteraz poslednú zastávku.

Poznámka: V praxi by sa oplatilo ešte na koniec každú zastávku posunúť tak, aby bola čo najviac uprostred domov, ktoré obsluhuje. Napríklad v obci, kde sú každé dva domy viac ako kilometer od seba, určite obyvatelia viac uvítajú riešenie, kde je zastávka pri každom dome, ako riešenie, kde je zastávka 500 metrov za každým domom…

2.3 Úloha o dláždení

Teraz si ukážeme aktivitu, v ktorej je tvorba efektívnych algoritmov schovaná. Ak začneme skúšať možnosti, postupne si vymyslíme nejaký algoritmus. Ten bude pravdepodobne pažravý, pretože ľudia majú tendenciu nachádzať práve pažravé riešenia.

Bližšie informácie o aktivite nájdete na webstránke http://csunplugged.org/ . Na tejto stránke nájdete rôzne ďalšie aktivity a didaktické poznámky. Obrázok mesta je použitý z tejto stránky, je však trochu pozmenený kvôli pôvodnej nejednoznačnosti.

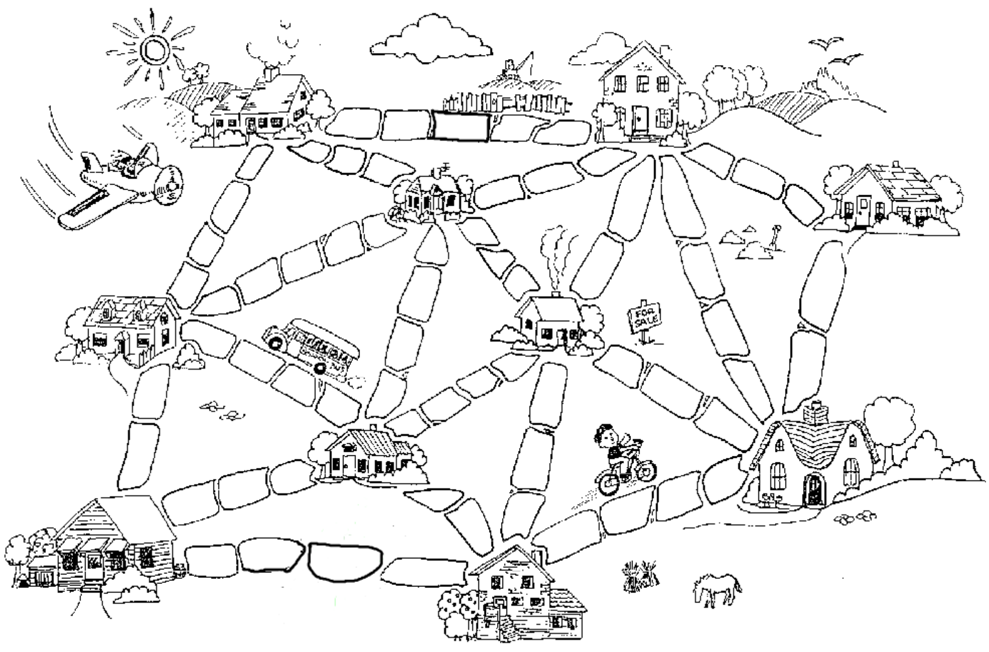
Aktivita

Bolo raz jedno mesto a to malo cesty nevydláždené. Akonáhle sa strhla búrka, všetky cesty boli zablatené. Magistrát mesta sa rozhodol s touto situáciou niečo spraviť – vydláždiť niektoré cesty. Peňazí však nikdy nie je nazvyš, a tak chcú použiť čo najmenej dlaždíc.

Na papieri dostanete obrázok mesta a cesty medzi domčekmi. Pre každú cestu z obrázka vidíte, koľko dlaždíc treba na jej vydláždenie.

Vyfarbite cesty, ktoré chcete vydláždiť. Tieto cesty vyberte tak, aby sa po nich dalo dostať z každého domčeka do každého. Pokúste sa položiť čo najmenej dlaždíc.

Ak je tento počet menší ako dosiaľ nájdený, povedzte ho nahlas.



Obrázok 4: Vyfarbite cesty medzi domčekmi tak, aby ste použili čo najmenej dlaždíc a mohli ste prejsť medzi ľubovoľnými dvoma domčekmi

(Zdroj: http://csunplugged.org/)

V tejto aktivite je dôležité, aby mohli riešitelia vykrikovať stále menšie a menšie čísla, a tým sa predbiehať. Toto súťaživé prostredie ich motivuje vylepšovať svoju stratégiu, a tak postupne mnohí z nich objavia zákonitosti vedúce k optimálnemu postupu.

Ľudia pri tejto aktivite najčastejšie postupujú dvoma spôsobmi:

- Začneme z prázdnej mapy. Postupne dláždime cesty tak, aby každá nová cesta spojila nejaké domčeky, medzi ktorými sa dovtedy nedalo prejsť po dlaždiciach.
- Začneme z mapy, kde sú všetky cesty vydláždené. Postupne mažeme („oddláždujeme“) cesty, ktoré sú v danej chvíli nadbytočné.

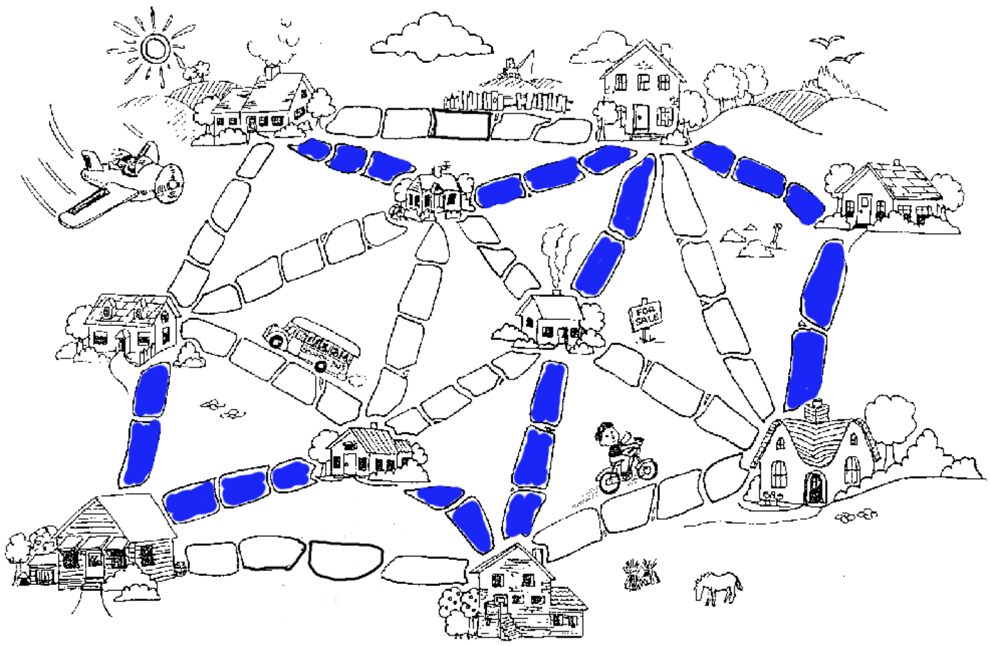
Akú stratégiu ste použili vy?

Ako však dosiahnuť najmenší počet dlaždíc? Najjednoduchšie pozorovanie, ktoré odhalia takmer všetci riešitelia: nikdy sa neoplatí postaviť cesty „do kruhu“. Samo o sebe však toto pozorovanie nestačí.

Ukazuje sa, že k optimálnemu riešeniu vedie hneď niekoľko rôznych pažravých prístupov:

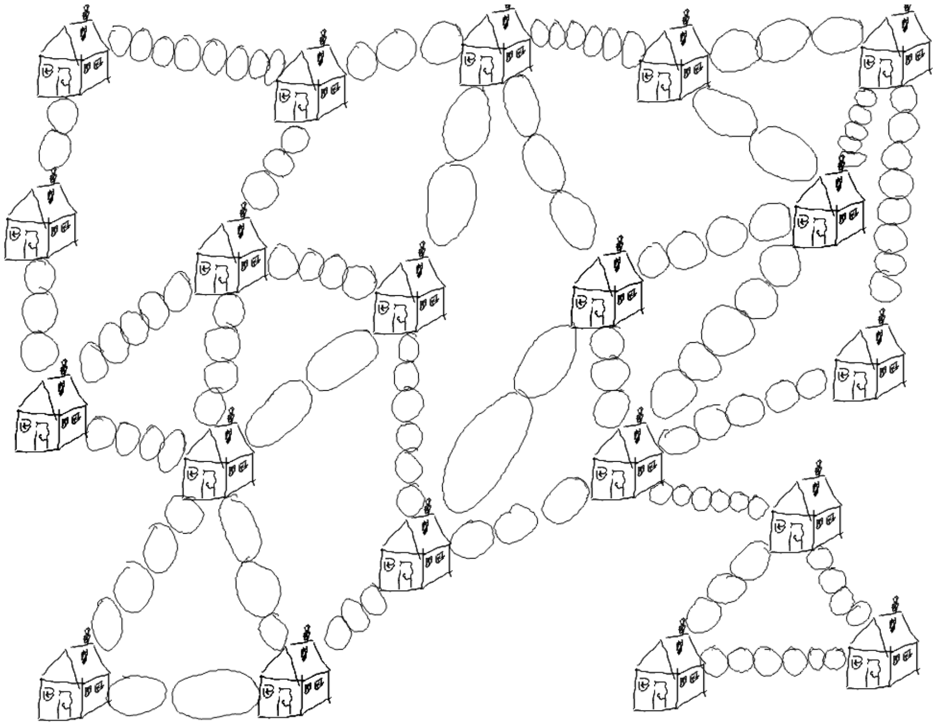
- Budeme sa na cesty pozerať v poradí od cesty s najmenším počtom dlaždíc k ceste s najväčším počtom. Ak už medzi danými domčekmi prejsť vieme, cestu necháme nevydláždenú, ak ešte nie, tak ju vydláždime.
- Na začiatku prehlásime všetky cesty za vydláždené. Teraz začneme cesty spracúvať v opačnom poradí, začínajúc tou, na ktorú treba dlaždíc najviac. Zakaždým overíme, či nám odstránenie cesty nerozpojí cestnú sieť, a ak nie, tak dotyčnú cestu odstránime.
- Začneme z ľubovoľného domčeka. K nemu pripojíme jeho najbližšieho suseda (t. j. toho, ku ktorému vedie cesta s najmenej dlaždicami). Teraz nájdeme spomedzi zvyšných domčekov ten, ktorý vieme najlacnejšie pripojiť k jednému z prvých dvoch, a pripojíme ho k nim. Postup opakujeme, až kým k vznikajúcej cestnej sieti postupne nepripojíme všetky domčeky.

Jeden z možných výsledkov si ukážeme na obrázku.



Obrázok 5: Jedno z riešení pre aktivitu dláždenia použitím prvého algoritmu

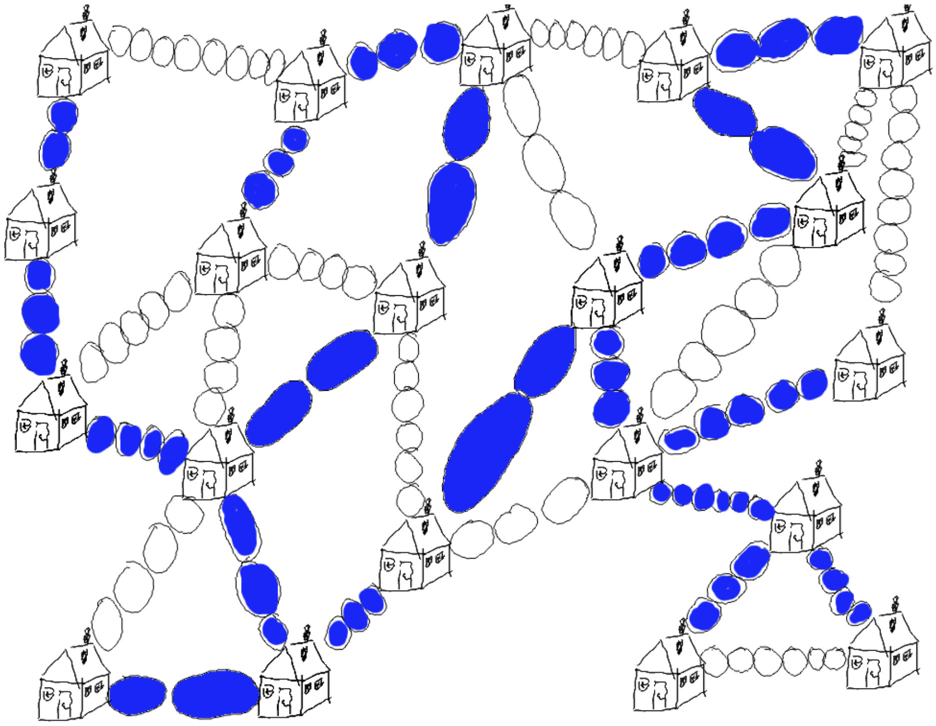
Skúsme si ešte niektorý z postupov na väčšom meste. To nám pomôže nájsť v postupe nevyriešené prípady a väčšie mesto zvýrazní potrebu použiť naozajstný algoritmus, nie iba intuitívne vyfarbovanie.



Obrázok 6: Aktivita na väčšom meste

Väčšinou si nepovieme, v akom poradí prechádzame po cestách skladajúcich sa z dvoch dlaždíc. Keď kreslíme, vyberáme si podľa rôznych preferencií. Ak už však algoritmus programujeme, počítač si už nevyberá a musí mať naprogramované presné poradie.

Rôzne algoritmy budú produkovať rôzne riešenia, ktoré ale budú mať rovnaký (optimálny) počet použitých dlaždíc. Dokonca ak použijeme ten istý „algoritmus“, sa naše riešenia môžu líšiť. Bude to preto, že tento „algoritmus“ nie je popísaný do detailov a neriešime, v akom poradí vyberať cesty s rovnakým počtom dlaždíc. Jedno z riešení, použitím prvého algoritmu, môže vyzerať nasledovne:



Obrázok 7: Jedno z riešení pre aktivitu na väčšom meste

Tak ako aj v predchádzajúcich úlohách, aj tu je dôležité vedieť argumentovať, prečo pažravé riešenie použije najmenej dlaždíc, a teda je optimálne. Vyberte si jeden z týchto postupov (alebo svoj vlastný, o ktorom ste presvedčení, že vždy funguje). Pokúste sa zamyslieť, ako by ste zdôvodnili, že vami zvolený postup skutočne pre ľubovoľnú mapu nájde najlacnejšie riešenie.

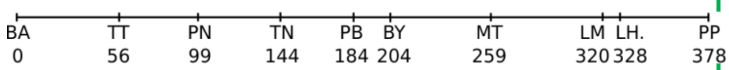
2.4 Čo to teda sú tie pažravé algoritmy?

> Ak riešime úlohu pažravo, znamená to, že v každej situácii sa snažíme nájsť najlepšie možné riešenie a dúfame, že výsledné riešenie bude tiež najlepšie možné.

V úlohe o tankovaní to znamenalo, že v každej situácii sme tankovali na poslednú chvíľu, v úlohe o euro-minciach sme vždy použili najväčšiu možnú mincu a v úlohe o dláždení mesta sme dláždili tie cesty, na ktoré stačilo použiť najmenej dlaždíc.

Takýto postup je prirodzený, lebo väčšina ľudí sa správa pažravo „od prírody", či už pre uspokojenie svojich potrieb alebo potrieb rodiny. Ak však chceme nachádzať optimálne riešenia, musíme si dávať pozor na to, či pažravá stratégia dáva naozaj optimálne riešenie pre konkrétnu úlohu.

2.5 Úlohy na precvičenie

Zadanie 16	Cestujeme z Bratislavy do Popradu. Na obrázku je nakreslená trasa, benzínové čerpadlá na nej a ich vzdialenosť na trase. Auto prejde najviac 100 km na plnú nádrž. Zistite, na ktorých benzínových čerpadlách máme tankovať, aby sme čo najmenší počet ráz zastavovali.  Na základe postupu, ktorý ste použili, sa pokúste sformulovať všeobecný algoritmus a dokázať o ňom, že vždy nájde optimálne riešenie.
Zadanie 17	V obchode chceme zaplatiť nákup v hodnote 5.69 EUR. Používame bežnú sadu euro mincí, t. j. mince v hodnotách 1, 2, 5, 10, 20, 50 centov a 1, 2 eurá. Z každej hodnoty máme dostatočne veľa mincí. Aké mince použiť na zaplatenie vyššie spomenutej sumy, aby sme dokopy použili čo najmenej kusov?
Zadanie 18	Pri platení eurami môžeme používať pažravý algoritmus „pri platení vždy použi najväčšiu mincu, akú môžeš". Použije tento algoritmus vždy optimálny (t. j. najmenší možný) počet mincí?
Zadanie 19	Nájdite najmenšiu sumu v centoch, na ktorej zaplatenie potrebujeme použiť aspoň osem mincí.